

Devoir Maison n° 1 : corrigé

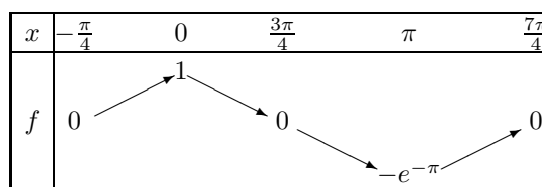
MPSI Lycée Camille Jullian

2 septembre 2026

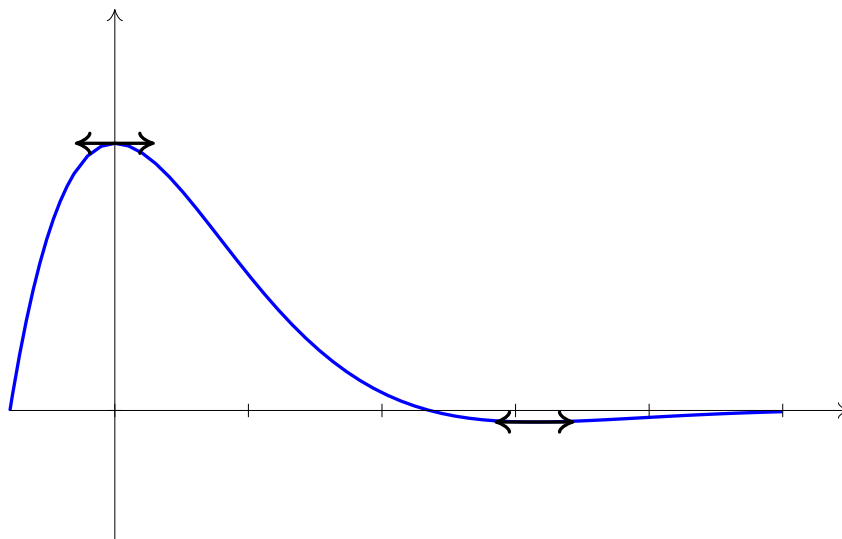
Problème

Partie A : étude d'une fonction.

1. (a) Vous avez du voir au lycée les formules d'addition pour le sinus : $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(x) + \cos(x))$.
On peut donc écrire $f(x) = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en constatant que $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
- (b) Sous la forme obtenue à la question précédente, f ne peut s'annuler que si le sinus s'annule (une exponentielle étant toujours strictement positive, e^{-x} ne peut pas s'annuler). Or, $\sin(\theta) = 0$ lorsque θ est un multiple entier de π . Les valeurs d'annulation de f sont donc tous les réels de la forme $k\pi - \frac{\pi}{4}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- (c) En utilisant simplement l'encadrement classique d'un sinus entre -1 et 1 , on peut affirmer que $-\sqrt{2}e^{-x} \leq f(x) \leq \sqrt{2}e^{-x}$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2}e^{-x} = 0$. Une simple application du théorème des gendarmes permet de conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. (a) Dérivons par exemple f sous la forme initiale donnée dans l'énoncé. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)) + e^{-x}(-\sin(x) + \cos(x)) = e^{-x}(-\cos(x) - \sin(x) - \sin(x) + \cos(x)) = -2\sin(x)e^{-x}$.
- (b) Comme dans la question 1.b, $f'(x)$ ne peut s'annuler que si le sinus s'annule, donc si $x = k\pi$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
3. (a) Dans l'intervalle sélectionné, la dérivée s'annule deux fois, en 0 et en π . De plus, le sinus est positif entre 0 et π , donc $f'(x) \leq 0$ sur $[0, \pi]$, ce qui prouve que f est décroissante sur cet intervalle. Elle sera croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, ainsi que sur $\left[\pi, \frac{7\pi}{4}\right]$. Pour dresser le tableau de variations, il ne reste plus qu'à calculer $f(0) = e^0 \times (\cos(0) + \sin(0)) = 1$, et $f(\pi) = e^{-\pi}(\cos(\pi) + \sin(\pi)) = -e^{-\pi}$ (valeur très proche de 0). On peut aussi remarquer que f s'annule en $-\frac{\pi}{4}$, en $\frac{3\pi}{4}$ et en $\frac{7\pi}{4}$ sur l'intervalle I d'après la question 1.b.



- (b) Sur ce corrigé, je vous donne évidemment un tracé « parfait » effectué par ordinateur. En pratique, sur une copie, et en l'absence de calculatrice (notamment pour calculer l'ordonnée du minimum), on se contente d'indiquer le plus correctement les points importants (en indiquant bien les tangentes horizontales au niveau des minima/maxima), et on prend une échelle qui nous arrange. Ici, prendre $\frac{\pi}{4}$ comme unité sur l'axe des abscisses est pertinent, mais le logiciel que j'utilise refuse de dessiner autre chose que des graduations espacées d'une unité...



Partie B : calcul d'intégrales.

1. (a) Au vu des calculs effectués en première partie, $-f - \frac{1}{2}f' = e^{-x}(-\cos(x) - \sin(x) + \sin(x)) = -e^{-x}\cos(x)$. Si on dérive cette fonction, on obtient l'expression $e^{-x}\cos(x) - e^{-x} \times (-\sin(x)) = e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$, ce qui prouve bien que $-f - \frac{1}{2}f'$ est une primitive de f .
- (b) Il n'y a plus rien à faire puisqu'on a déjà prouvé que $-f - \frac{1}{2}f' = G$.
- (c) Les fonctions trigonométriques vérifiant $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ (et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, même si ça ne nous servira pas ici), on a $G(x + \pi) = -e^{-x-\pi}\cos(x + \pi) = e^{-x}e^{-\pi}\cos(x) = -e^{-\pi}G(x)$.
2. (a) Puisque G est une primitive de f , $I_0 = [G(x)]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -e^{-\frac{3\pi}{4}}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + e^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}(1 + e^{\pi})$. Le calcul de I_1 est identique à un facteur $e^{-\pi}$ près d'après les questions précédentes, donc $I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7\pi}{4}}(1 + e^{\pi})$.
- (b) La fonction f étant de signe constant sur les intervalles $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, la valeur absolue de l'intégrale sur chaque intervalle représente l'aire géométrique située sous la courbe (autre dit une aire sans signe, contrairement à l'aire algébrique représentée par le calcul de l'intégrale proprement dite). La somme des deux est donc égale à l'aire géométrique située entre la courbe et l'axe des abscisses sur tout l'intervalle I .
- (c) C'est évident en exploitant le résultat de la question c : $I_{n+1} = [G(x)]_{-\frac{3\pi}{4}+(n+1)\pi}^{\frac{3\pi}{4}+(n+1)\pi} = -e^{-\pi} \left(G\left(\frac{3\pi}{4} + n\pi\right) - G\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \right) = -e^{-\pi}I_n$. La suite (I_n) est donc une suite géométrique de raison $-e^{-\pi}$, dont on déduit immédiatement que $I_n = (-1)^n e^{-n\pi} I_0$ (on peut remplacer I_0 par sa valeur si on le souhaite mais ça ne donne pas vraiment une expression sympathique, l'intérêt en est donc limité).