

Devoir Maison n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 2 septembre 2026

Ce DM, comme tous ceux qui suivront pendant l'année, est constitué d'un seul court problème, en l'occurrence tiré d'un sujet de bac (posé l'année où j'ai moi-même passé le mien, ça date un peu). Il est certainement possible de trouver en ligne un corrigé de ce sujet (ou de le faire traiter par une IA), mais il est évident que ça ne présenterait pas le moindre intérêt pour vous. Le but de ces devoirs à la maison réguliers est de vous entraîner à chercher des problèmes, et surtout à les **rédigier** le plus soigneusement possible, élément qui jouera un rôle important dans votre évaluation aux concours. Je vous rappelle d'ailleurs que vous pouvez trouver à cette adresse quelques conseils à ce sujet :

<https://www.normalesup.org/glaфон/kaju26/redaction.pdf>

Problème

Partie A : étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$.

1. (a) Exprimer $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.

En déduire une expression de $f(x)$ ne faisant pas intervenir la fonction cosinus.

- (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

- (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. (a) Montrer que la dérivée f' de la fonction f a pour expression $f'(x) = -2e^{-x} \sin(x)$.

- (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

3. On note I l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

- (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I , puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur ce même intervalle.

- (b) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f , en se restreignant aux abscisses appartenant à l'intervalle I (unités au choix, vous n'êtes absolument pas obligés de prendre un repère orthonormal).

Partie B : calcul d'intégrales.

On pose dans cette partie $G(x) = -e^{-x} \cos(x)$.

1. (a) Démontrer qu'une primitive de f est $-f - \frac{1}{2}f'$.

- (b) En déduire que G est une primitive de f .

- (c) Montrer que, pour tout réel x , on a $G(x + \pi) = -e^{-\pi}G(x)$.

2. On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_{-\frac{\pi}{4} + n\pi}^{\frac{3\pi}{4} + n\pi} f(x) dx$.

- (a) Calculer I_0 et I_1 .

- (b) Interpréter géométriquement la valeur $|I_0| + |I_1|$.

- (c) Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = -e^{-\pi}I_n$.

En déduire une expression explicite de I_n en fonction de n .