

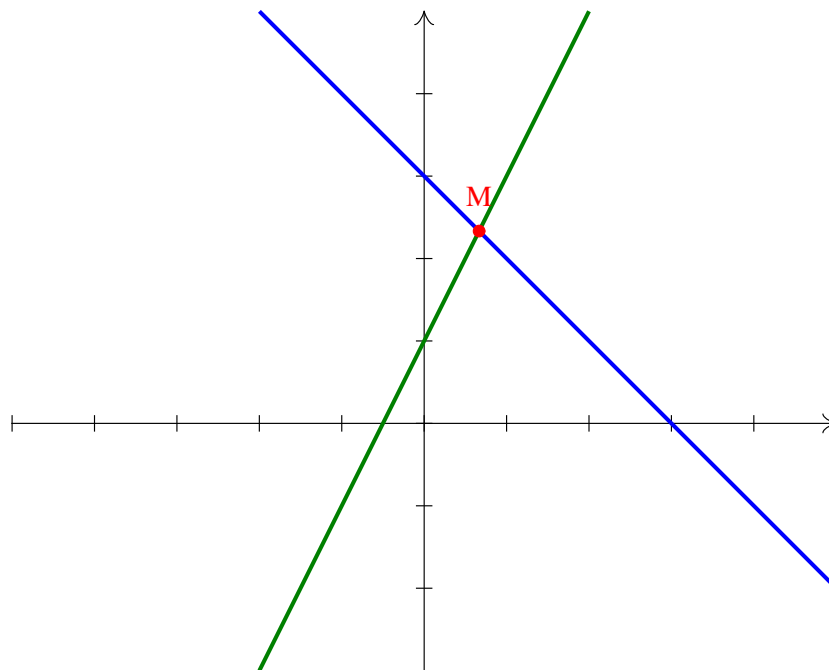
Aide au calcul, séance 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

4 septembre 2026

Exercice 1 : une annale de brevet.

1. On peut bien sûr tout développer brutalement (en « voit » sans même faire le moindre calcul qu'on va obtenir un polynôme du second degré sauf si les termes de plus haut degré se simplifient), mais, si on a fait l'effort de lire l'énoncé de la question suivante et d'observer l'expression de $f(x)$, il vaut nettement mieux tout factoriser par $3 - x$: $f(x) = (3 - x)((3 - x) - (2x - 5) - 2(x + 1)) = (3 - x)(3 - x - 2x + 5 - 2x - 2) = (x - 3)(5x - 6)$. On obtient bien l'expression d'une fonction polynomiale de degré 2
2. On l'a déjà fait à la question précédente.
3. (a) Les seules valeurs interdites sont celles annulant le dénominateur, donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{6}{5} \right\}$.
(b) Si on a tout développé dans la première question, la simplification devient évidente puisqu'on constate que $f(x) = 9 - 6x + x^2 + 2x^2 - 5x - 6x + 15 + 2x^2 + 2x - 6x - 6 = 5x^2 - 21x + 18$. On en déduit que $F(x) = \frac{(x - 3)(5x - 6)}{(2x + 1)(-5x + 6)} = \frac{3 - x}{2x + 1}$, du moins pour toutes les valeurs de x différentes de $\frac{6}{5}$. Si on n'a pas la forme développée de $f(x)$ sous la main, on factorise le numérateur en calculant brutalement son discriminant $\Delta = 441 - 360 = 81$, et ses racines $x_1 = \frac{21 + 9}{10} = 3$ et $x_2 = \frac{21 - 9}{10} = \frac{6}{5}$. On fait tout de même attention quand on utilise cette méthode à ne pas oublier le coefficient dominant égal à 5 dans la factorisation : le numérateur de $F(x)$ est égal à $6(x - 3)\left(x - \frac{6}{5}\right) = (x - 3)(5x - 6)$. On notera quand même les notation aberrantes utilisées à l'époque pour désigner les différentes fonctions : F pour une fonction n'ayant rien à voir avec une primitive de F , et ce fameux F' que j'ai supprimé, sans rapport avec la dérivée.
(c) En prenant l'expression simplifiée (les valeurs interdites ne risquent pas d'être solutions de notre équation), on doit avoir $3 - x = 2x + 1$, soit $3x = 2$, donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.
(d) Là encore, autant partir de l'expression simplifiée : $F(\sqrt{2}) = G(\sqrt{2}) = \frac{3 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1}$. On peut simplifier en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée :
$$F(\sqrt{2}) = \frac{(3 - \sqrt{2})(2\sqrt{2} - 1)}{(2\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{6\sqrt{2} - 3 - 4 + \sqrt{2}}{8 - 1} = \frac{7\sqrt{2} - 7}{7} = \sqrt{2} - 1.$$
4. (a) Il s'agit de dessiner deux droites, j'ose espérer que ça ne vous pose pas le moindre problème.



(b) Les droites se coupent à une abscisse vérifiant $3 - x = 2x + 1$, donc pour $x = \frac{2}{3}$, c'est-à-dire le réel vérifiant $F(x) = 1$. L'ordonnée correspondante vaut $3 - \frac{2}{3} = 2 \times \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3}$, donc $M\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (point indiqué en rouge sur le superbe graphique précédent).

5. Le plus simple est de faire un petit tableau de signes (en faisant attention à bien mettre un + côté gauche pour le facteur $3 - x$) :

x	$-\frac{1}{2}$	3
$3 - x$	+	+
$2x + 1$	-	+
$G(x)$	-	+

Conclusion : $\mathcal{S} = \left] -\frac{1}{2}, 3 \right]$ (bien sûr, on n'inclut pas la valeur interdite dans l'ensemble de solutions).

Rassurez-moi, vous auriez tous eu votre brevet les doigts dans le nez en 1976 ? Ah, une dernière précision s'impose tout de même, ce n'est pas l'épreuve de brevet que j'ai passée à la fin de mon collège, je n'étais **pas né** en 1976, je suis vieux mais pas à ce point...

Exercice 2 : du calcul « élémentaire ».

- Le plus simple est de commencer par décomposer le nombre sous la racine carrée en produit de facteurs premiers : $2\,592 = 2 \times 1\,296 = 2^2 \times 648 = 2^3 \times 324 = 2^4 \times 162 = 2^5 \times 81 = 2^5 \times 3^4$. Ensuite, on simplifie $\sqrt{2^5 \times 3^4} = 3^2 \times 2^2 \times \sqrt{2} = 36\sqrt{2}$.
- Plutôt que de développer très brutalement des carrés de sommes de trois termes (ce qu'on peut toujours faire en adoptant la formule suivante : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$), on peut constater qu'on est en présence d'une différence de deux carrés et utiliser une identité remarquable bien connue : $(a+b-c)^2 - (a-b+c)^2 = (a+b-c+a-b+c)(a+b-c-a+b-c) = 2a(2b-2c) = 4ab - 4ac$.

3. $\sqrt{\frac{17}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{17+6+9}{18}} + \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{32}{18}} + \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{16}{9}} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2.$
4. On factorise simplement tout ce qu'on peut avant de simplifier : $\frac{x^3 + x^5}{x^5 + x^7} = \frac{x^3(1 + x^2)}{x^5(1 + x^2)} = \frac{1}{x^2}.$
5. Encore une fois, tout décomposer en produit de facteurs premiers avant de simplifier évite d'oublier des choses en cours de route :

$$\frac{25 \times 12^2 \times 10^3}{24 \times 8^2 \times 12^3} = \frac{5^2 \times (2^2 \times 3)^2 \times (2 \times 5)^3}{2^3 \times 3 \times (2^3)^2 \times (2^2 \times 3)^3} = \frac{5^2 \times 2^4 \times 3^2 \times 2^3 \times 5^3}{2^3 \times 3 \times 2^6 \times 2^6 \times 3^3} = \frac{5^5}{2^8 \times 3^2}.$$
6. Ici, la connaissance des identités remarquables du troisième degré qu'on verra bientôt en cours est d'une aide précieuse (mais on peut s'en sortir sans) :

$$\frac{a^3 - b^3}{(a - b)^2} - \frac{(a + b)^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)^2} - \frac{(a + b)^2}{a - b} = \frac{a^2 + ab + b^2 - (a + b)^2}{a - b} = -\frac{ab}{a - b}.$$
7. On révise ici les propriétés classiques du logarithme népérien : $\ln(72^3) - \ln(36^2) = 3 \ln(72) - 2 \ln(36) = 3 \ln(2^3 \times 3^2) - 2 \ln(2^2 \times 3^2) = 3 \ln(2^3) + 3 \ln(3^2) - 2 \ln(2^2) - 2 \ln(3^2) = 9 \ln(2) + 6 \ln(3) - 4 \ln(2) - 4 \ln(3) = 5 \ln(2) + 2 \ln(3).$
8.
$$\frac{(-ab^2)^3(ab^{-2})^2(c^2b)}{-a^2c^{-3}(ab^{-1}c^2)^3} = \frac{-a^3b^6a^2b^{-4}c^2b}{-a^2c^{-3}a^3b^{-3}c^6} = \frac{b^6}{c}.$$
9. Sauf si on connaît la formule du binôme de Newton (là encore, ça viendra un jour ou l'autre en cours), on n'a pas trop d'autre choix que d'élever deux fois de suite au carré (à l'aide de la formule donnée pour le deuxième calcul de ce même exercice pour la deuxième étape) :

$$(3x + 2)^4 = ((3x + 2)^2)^2 = (9x^2 + 12x + 4)^2 = 81x^4 + 144x^2 + 16 + 216x^3 + 72x^2 + 96x = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16.$$

Exercice 3 : résolution d'(in)équations.

1. $8x^3 + 27 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq -\frac{27}{8}$. Il suffit alors de constater que $-\frac{27}{8} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$, et de penser que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ pour conclure que $x \leq -\frac{3}{2}$, soit $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.
2. La fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on peut « tout passer au $\ln$ » pour obtenir l'inégalité équivalente $1 - x^2 \geq \ln(2)$, donc $x^2 \leq 1 - \ln(2)$, ce qui se produit lorsque $x \in [-\sqrt{1 - \ln(2)}, \sqrt{1 - \ln(2)}]$ (un petit dessin de la courbe de la fonction carré si vous n'êtes pas convaincu ; en fait, la seule chose à laquelle il faut faire attention, c'est vérifier que $1 - \ln(2) \geq 0$, ce qui est bien le cas puisque $e > 2$, donc $1 = \ln(e) > \ln(2)$).
3. On met tout au même dénominateur, mais pas trop brutalement quand même puisqu'il y a des facteurs communs entre certains dénominateurs : $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x(x-1) - x(x+1) + 2}{x^2-1} = \frac{2-2x}{x^2-1}$. Or, cette fraction ne s'annule jamais (la seule valeur d'annulation du numérateur est une valeur interdite annulant le dénominateur). On a donc tout simplement $\mathcal{S} = \emptyset$.
4. C'est un cas classique de changement de variable : on pose $X = e^x$ (en se rappelant que $e^{2x} = (e^x)^2$) pour se ramener à l'équation du second degré $5X^2 - 4X - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 + 20 = 36$, et qui admet donc pour racines $X_1 = \frac{4+6}{10} = 1$ et $X_2 = \frac{4-6}{10} = -\frac{1}{5}$. On remonte alors aux valeurs de la variable initiale x : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = -\frac{1}{5}$ est impossible puisqu'une exponentielle est toujours positive. L'équation n'admet donc qu'une seule solution : $\mathcal{S} = \{0\}$.
5. Encore un exemple où il vaut mieux se rendre compte que le membre de gauche est une différence de deux carrés et peut donc se factoriser via identité remarquable : $(x^2 + 2x -$

$3)^2 - 25 = (x^2 + 2x - 3 + 5)(x^2 + 2x - 3 - 5) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 8)$. Reste à étudier le signe de chacun de ces deux facteurs pour faire un tableau de signes : $x^2 + 2x + 2$ a un discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$ strictement négatif, il est donc toujours positif. Le deuxième facteur $x^2 + 2x - 8$ admet pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$ et a donc pour racines $x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$. Le trinôme est négatif entre ses racines, et comme le premier facteur était toujours positif, on en déduit immédiatement que $\mathcal{S} =]-4, 2[$.

6. Un classique : on passe la constante à gauche, on met au même dénominateur, et on fait un tableau de signe (si besoin) : $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 3} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2 - (x^2 - 2x + 3)}{x^2 - 2x + 3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x - 5}{x^2 - 2x + 3}$. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 4 - 12 < 0$, il est toujours positif. Notre quotient est donc du signe de $x - 5$, et $\mathcal{S} =]-\infty, 5[$.

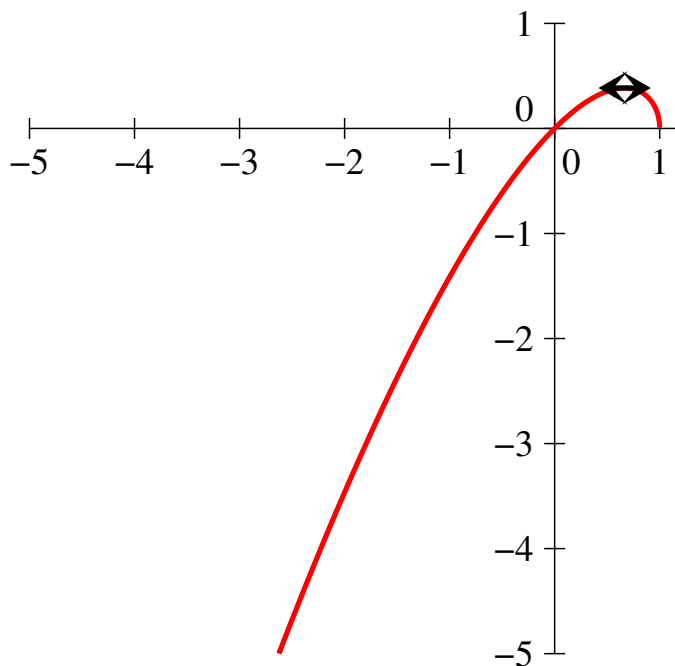
7. Le retour du changement de variable : on pose $X = \ln(x)$, et on se souvient que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, pour obtenir l'équation du second degré $2X^2 + 3X - 9 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 9 + 72 = 81$, et qui admet pour racines $X_1 = \frac{-3-9}{4} = -3$ et $X_2 = \frac{-3+9}{4} = \frac{3}{2}$. Il ne reste plus qu'à remonter aux valeurs de x via la fonction exponentielle : $\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$ et $\ln(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$. On conclut : $\mathcal{S} = \{e^{-3}, e^{\frac{3}{2}}\}$.

Exercice 4 : études de fonctions.

1. La fonction f_1 est définie et dérivable sur $] -\infty, 1[$ (plus précisément elle est définie sur $] -\infty, 1[$, mais pas dérivable en 1), de dérivée $f_1'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}}$ (le seul petit piège consiste à ne pas oublier le signe dans la deuxième partie, qui découle de la dérivée égale à -1 du $1-x$ situé sous la racine carrée). Si on souhaite étudier les variations de la fonction, la méthode sera toujours la même pour ce genre de dérivée, on met simplement au même dénominateur : $f_1'(x) = \frac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$. Cette dérivée est du signe de $2-3x$, la fonction f_1 admet donc en $\frac{2}{3}$ un maximum de valeur $f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. On a par ailleurs $f_1(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$. Voici donc le tableau de variations de la fonction :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1
f_1	$-\infty$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	0

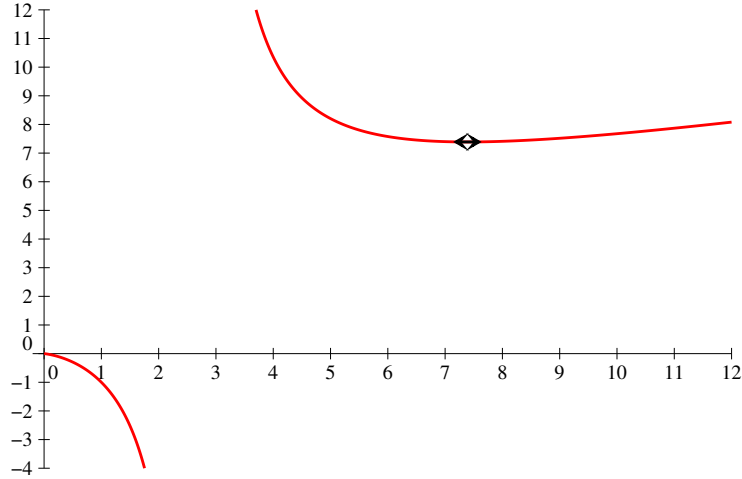
Et une allure de la courbe :



2. La fonction f_2 est définie et dérivable sur $]0, e[\cup]e, +\infty[$ (le dénominateur s'annulant lorsque $\ln(x) = 1$, donc $x = e$), de dérivée $f_2'(x) = \frac{\ln(x) - 1 - 1}{(\ln(x) - 1)^2} = \frac{\ln(x) - 2}{(\ln(x) - 1)^2}$. L'étude de variations ne pose donc aucun problème, la dérivée s'annule lorsque $\ln(x) = 2$, soit $x = e^2$, et f_2 admet un minimum local à cet endroit de valeur $f_2(e^2) = \frac{e^2}{2-1} = e^2$. Il n'y a pas de forme indéterminée pour la limite en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$. Pas de problème non plus en e où le numérateur a une limite finie : $\lim_{x \rightarrow e^-} f_2(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow e^+} f_2(x) = +\infty$. Seule la limite en $+\infty$ pose problème si on ne connaît pas les résultats classiques de croissance comparée, contentons-nous de signaler que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$ (la croissance du numérateur étant plus rapide que celle du dénominateur). On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0	e	e^2	$+\infty$
f_2	0	$+\infty$	e^2	$+\infty$

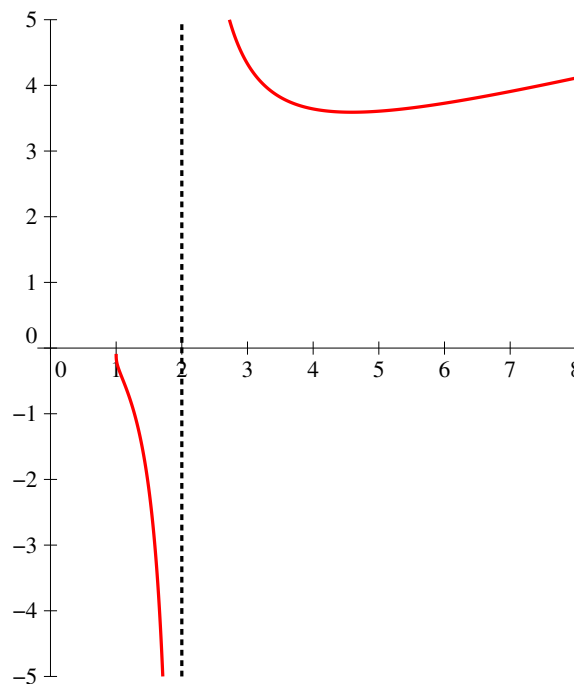
Et une allure de courbe (les plus motivés pourront constater que la dérivée f_2' admet une limite nulle quand x tend vers 0, ce qui justifie le fait que la courbe démarre « horizontalement » à l'origine du repère) :



3. La fonction f_3 est très différente de la précédente, même si elle n'en a pas l'air au premier abord. Elle est définie sur $]1, 2[\cup]2, +\infty[$ (cette fois-ci le dénominateur s'annule lorsque $x-1 = 1$, soit $x = 2$), de dérivée $f'_3(x) = \frac{\ln(x-1) - \frac{x}{x-1}}{(\ln(x-1))^2} = \frac{(x-1)\ln(x-1) - x}{(x-1)\ln^2(x-1)}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif sur le domaine de définition de f_3 , par contre le signe de son numérateur n'est pas évident. On peut toutefois poser $g(x) = (x-1)\ln(x-1) - x$ et dériver à nouveau : $g'(x) = \ln(x-1) + \frac{x-1}{x-1} - 1 = \ln(x-1)$. La fonction g est donc décroissante sur $]1, 2[$ et croissante sur $]2, +\infty[$. À l'aide de croissances comparées, on peut prouver que $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$, donc g (et par conséquent f'_3) est négative sur tout l'intervalle $]1, 2[$, ce qui prouve la décroissance de f_3 sur cet intervalle. De plus, $g(2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (on factorise tout par x puis on utilise de la croissance comparée), donc la fonction g s'annule exactement une fois sur $]2, +\infty[$, en une valeur α qu'on ne peut pas calculer. La fonction f_3 est alors décroissante sur $]2, \alpha[$, puis croissante sur $]\alpha, +\infty[$. Comme par définition on a $g(\alpha) = 0$, on peut dire que $\ln(\alpha-1) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, et donc que $f_3(\alpha) = \frac{\alpha}{\ln(\alpha-1)} = \alpha - 1$ (ce qui ne nous avance pas beaucoup puisqu'on ne connaît pas α). Les limites posent moins de problèmes : $\lim_{x \rightarrow 1} f_3(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f_3(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f_3(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$ (il s'agit pour cette dernière limite de croissance comparée). D'où le tableau suivant :

x	1	2	α	$+\infty$
f_3	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Et la courbe qui va avec (si on dispose d'outils interdits comme une calculatrice, on peut obtenir $\alpha \simeq 4.7$) :



4. Il faut donc redériver la fonction $f'_1 : x \mapsto \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$, qui est définie sur $] -\infty, 1[$. On calcule

$$f'_4(x) = \frac{-6\sqrt{1-x} - (2-3x) \times \frac{-2}{2\sqrt{1-x}}}{4(1-x)} = \frac{-6(1-x) + (2-3x)}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x-4}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Cette dérivée}$$

est du signe de $3x-4$, qui est toujours négatif sur l'intervalle de définition de f_4 . La fonction est donc bêtement décroissante sur $] -\infty, 1[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 1} f_4(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) = +\infty$ (on peut factoriser en haut et en bas par $\sqrt{-x}$, en faisant quand même attention au fait que x est négatif). On se passera pour une fois du tableau de variations sans intérêt, et même de la courbe qui n'en a guère plus.

5. Le dénominateur de la fonction f_5 étant toujours positif (il a pour discriminant $\Delta = 1-8 < 0$), la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Un passionnant calcul de dérivée de quotient donne

$$f'_5(x) = \frac{(3x^2-2)(x^2+x+2) - (2x+1)(x^3-2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{3x^4+3x^3+4x^2-2x-4 - (2x^4+x^3-4x^2+1)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{x^4+2x^3+8x^2-2x-5}{(x^2+x+2)^2}, \text{ une dérivée}$$

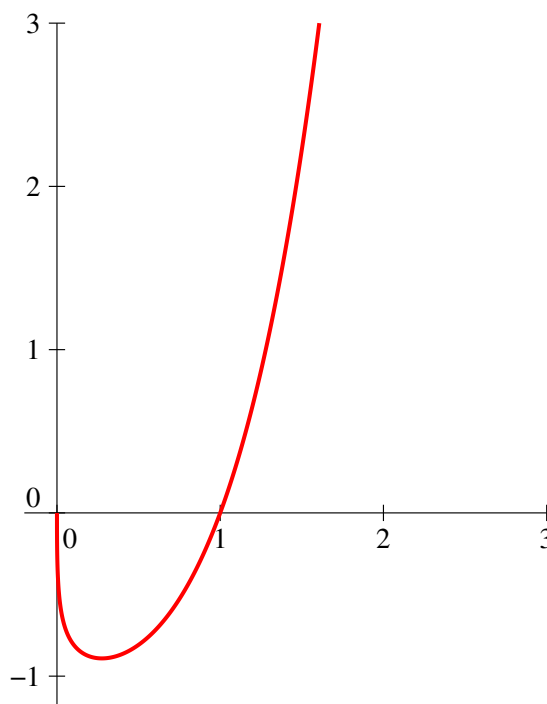
qu'on se gardera bien de tenter d'étudier !

6. La fonction f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Un produit de trois fonctions se dérive comme un produit de deux fonctions (on dérive successivement chacune des fonctions), mais si on a des doutes, on peut toujours se contenter de dériver un produit de deux fonctions en prenant comme deuxième fonction le produit des fonctions exponentielle et $\ln$ par exemple. D'une façon

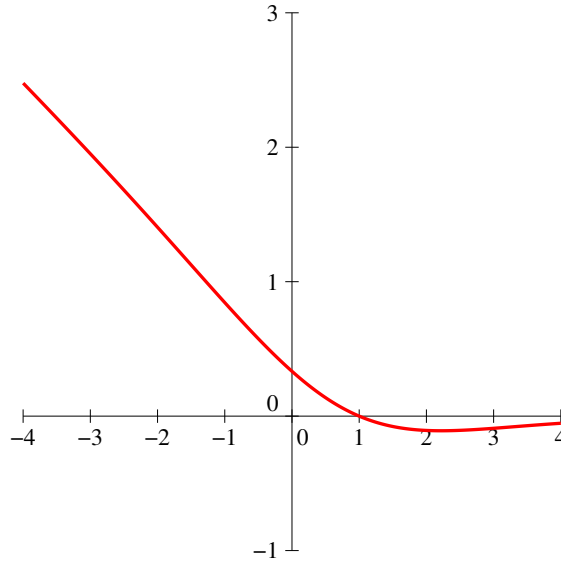
ou d'une autre, on trouve $f'_6(x) = \frac{e^x \ln(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^x \ln(x) + \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x \ln(x) + 2xe^x \ln(x) + 2e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(2 + \ln(x) + 2x \ln(x))}{2\sqrt{x}}$. Cette dérivée est du signe de $h(x) = 2 + \ln(x) + 2x \ln(x)$. On peut

l'étudier en dérivant à nouveau cette fonction $h : h'(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x) + 2$, puis en dérivant encore une fois : $h''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2x-1}{x^2}$. On déduit de ces palpitants calculs que la fonction h' est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, et en particulier qu'elle admet un minimum en $\frac{1}{2}$, de valeur $h'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 4 - 2\ln(2) > 0$ (car $\ln(2)$ est

largement inférieur à 2, c'est même plus petit que 1). Tout ça donc pour se rendre compte que la fonction h' est toujours positive, et donc que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. En écrivant $h(x) = 2 + \ln(x)(1+2x)$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, on en déduit que h va s'annuler une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que f_6 sera donc décroissante puis croissante sur son intervalle de définition. On a bien sûr $f_6(0) = 0$ (ainsi d'ailleurs que $f_6(1) = 0$ si on souhaite avoir un point de repère supplémentaire pour le tracé de la courbe) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = +\infty$, ce qui donne une allure de courbe ressemblant à ceci (on ne peut pas calculer précisément les coordonnées du minimum) :



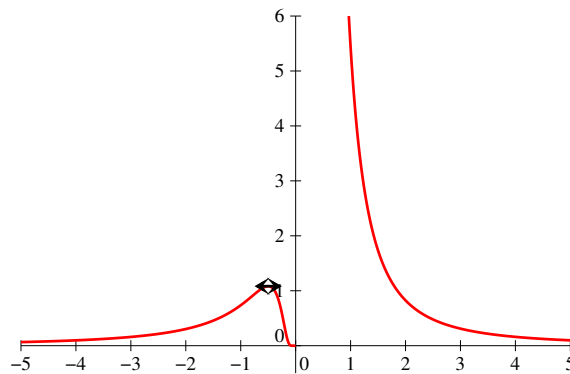
7. Le dénominateur de f_7 ne pouvant s'annuler (une exponentielle étant toujours positive), cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Elle y est dérivable, et $f'_7(x) = \frac{-(e^x + 2) - (1-x)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{(x-2)e^x - 2}{(e^x + 2)^2}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur $i(x) = (x-2)e^x - 2$. Là encore, on peut redériver pour étudier les variations : $i'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$. Cette dérivée est du signe de $x-1$, donc i est décroissante sur $]-\infty, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, avec pour minimum $i(1) = -e - 2 < 0$. À l'aide de la croissance comparée on peut affirmer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = -2$ (la limite nulle de l'exponentielle l'emporte sur la limite infinie du $x-2$), et sans croissance comparée on a bien sûr $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = +\infty$. La fonction i est donc négative sur $]-\infty, 1]$, mais s'annule une fois sur $[1, +\infty[$ avant de devenir positive. On en déduit que f_7 est décroissante sur un intervalle de la forme $]-\infty, \beta]$ et croissante sur $[\beta, +\infty[$, pour un certain réel $\beta > 1$. On calcule sans difficulté $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_7(x) = +\infty$ (le dénominateur ayant pour limite 2), par contre on a encore besoin d'une croissance comparée pour dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_7(x) = 0$. Là encore, le tableau de variations n'a guère d'intérêt, on ne peut pas calculer les coordonnées du minimum, on constate simplement que f_7 s'annule en 1 et on trace une allure de courbe :



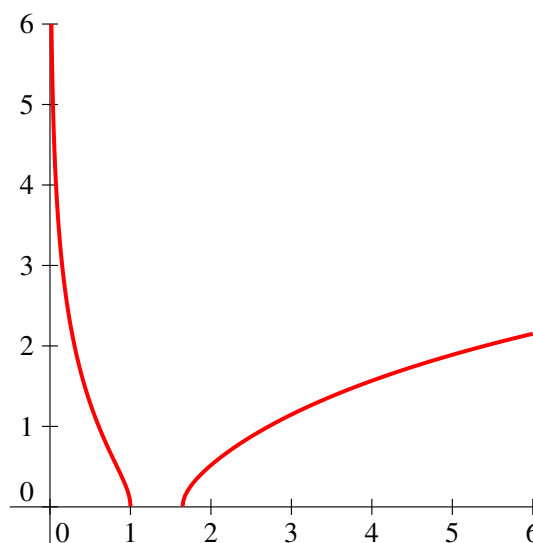
8. La fonction f_8 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $f'_8(x) = -\frac{4}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{2}{x^2} \times \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = -\frac{4x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, donc de $-2x-1$. La fonction est donc croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, puis décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ et sur $]0, +\infty[$. Elle admet pour maximum $f_8\left(-\frac{1}{2}\right) = 8e^{-2} = \frac{8}{e^2}$. Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_8(x) = 0$. Pas de problème pour déterminer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_8(x) = +\infty$ (il n'y a pas de forme indéterminée de ce côté-là, limite infinie au numérateur et nulle au dénominateur), par contre on a besoin de croissance comparée pour conclure que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_8(x) = 0$ (l'exponentielle qui a une limite l'emportant sur le dénominateur qui tend aussi vers 0). Un tableau de variations pour cette fonction :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f_8	$0 \nearrow \frac{8}{e^2} \searrow 0$			$+\infty \searrow 0$

Et la courbe qui va avec :



9. On peut en fait écrire plus simplement $f_9(x) = \sqrt{2(\ln(x))^2 - \ln(x)}$ en se rappelant que $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. Cette fonction est définie lorsque $2\ln(x)^2 - \ln(x) \geq 0$, soit $\ln(x)(2\ln(x) - 1) \geq 0$, ce qui se produit lorsque $x \in]0, 1] \cup [\sqrt{e}, +\infty[$ (on fait un petit tableau de signe pour s'en convaincre si besoin). La fonction est dérivable partout sauf aux bornes de ces intervalles, de dérivée $f'_9(x) = \frac{\frac{4\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}}{2f_9(x)} = \frac{4\ln(x) - 1}{2xf_9(x)}$. Pas besoin de plus détailler le dénominateur qui est de toute façon toujours positif quand f_9 est définie, f'_9 est donc du signe de $4\ln(x) - 1$, et s'annulerait donc en $e^{\frac{1}{4}}$ si ce nombre appartenait à son domaine de définition. Comme il est en fait compris entre 1 et $\sqrt{e}$, f_9 est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$. Elle s'annule bien entendu lorsque $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$, et $\lim_{x \rightarrow 0} f_9(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_9(x) = +\infty$ (on factorise simplement par $\ln(x)$ sous la racine carrée pour lever l'indétermination). La courbe ressemble à ceci :



10. La fonction f_{10} est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable a priori sur $] -1, 1[$ (car la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0), de dérivée $f'_{10}(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2) - x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 8 = 9$, et qui a donc pour racines $x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$. Le fait que la valeur 1 où f_{10} n'est pas censé être dérivable annule l'expression obtenue pour f'_{10} aura des effets sur la courbe (tangente horizontale) qu'on ne peut pas encore vraiment bien expliquer à ce stade de l'année. Contentons-nous de constater que f_{10} sera croissante sur $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, avec $f_{10}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, puis décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, avec donc un tableau de variations ressemblant à ceci :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
f_{10}	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1	0

Et la courbe qui va avec (en admettant la tangente horizontale en 1, ainsi qu'une tangente verticale de l'autre côté en -1 où la fonction n'est pas dérivable) :

