

Aide au calcul, séance 1

MPSI Lycée Camille Jullian

4 septembre 2026

Exercice 1 : une annale de brevet.

L'exercice qui suit constituait la première partie du sujet de brevet des collèges posé dans l'académie de Bordeaux il y a cinquante ans (juin 1976) :

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (3 - x)^2 - (2x - 5)(3 - x) + (2x - 6)(x + 1)$.

1. Montrer que f est une fonction polynômiale de degré 2.
2. Écrire $f(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes de degré 1.
3. On considère la fonction rationnelle F , telle que $F(x) = \frac{5x^2 - 21x + 18}{(-5x + 6)(2x + 1)}$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de F .
 - (b) Simplifier $F(x)$ et noter $G(x)$ l'expression simplifiée (dans l'énoncé de 1976, on préconisait de noter $F'(x)$ l'expression simplifiée!).
 - (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $F(x) = 1$.
 - (d) Calculer $F(\sqrt{2})$.
4. (a) Construire dans le plan rapporté à un repère orthonormal les représentations graphiques des fonctions affines définies par $g_1(x) = -x + 3$ et $g_2(x) = 2x + 1$.
(b) Calculer les coordonnées du point d'intersection M de ces représentations graphiques. Que représente l'abscisse du point M ?
5. Pour quelles valeurs de x a-t-on $G(x) \geq 0$?

Exercice 2 : du calcul « élémentaire ».

Simplifier les calculs suivants :

• $\sqrt{2592}$	• $(a + b - c)^2 - (a - b + c)^2$	• $\sqrt{\frac{17}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}}$
• $\frac{x^3 + x^5}{x^5 + x^7}$	• $\frac{25 \times 12^2 \times 10^3}{24 \times 8^2 \times 12^3}$	• $\frac{a^3 - b^3}{(a - b)^2} - \frac{(a + b)^2}{a - b}$
• $\ln(72^3) - \ln(36^2)$	• $\frac{(-ab^2)^3(ab^{-2})^2(c^2b)}{-a^2c^{-3}(ab^{-1}c^2)^3}$	• $(3x + 2)^4$

Exercice 3 : résolution d'(in)équations.

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $8x^3 + 27 \leq 0$

2. $e^{1-x^2} \geq 2$
3. $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = 0$
4. $5e^{2x} - 4e^x - 1 = 0$
5. $(x^2 + 2x - 3)^2 - 25 < 0$
6. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 3} < 1$
7. $2(\ln(x))^2 - 3 \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 9 = 0$

Exercice 4 : études de fonctions.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (et étudier leurs variations si possible) :

- $f_1(x) = x\sqrt{1-x}$
- $f_2(x) = \frac{x}{\ln(x)-1}$
- $f_3(x) = \frac{x}{\ln(x-1)}$
- $f_4 = f'_1$
- $f_5(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + x + 2}$
- $f_6(x) = \sqrt{x}e^x \ln(x)$
- $f_7(x) = \frac{1-x}{e^x + 2}$
- $f_8(x) = \frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$
- $f_9(x) = \sqrt{2(\ln(x))^2 + \ln(x^2) - 3 \ln(x)}$
- $f_{10}(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

Solutions (à ne regarder que pour vérifier vos résultats).

Exercice 1

2. $f(x) = (x-3)(5x-6)$

3. a) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{6}{5}\right\}$ b) $G(x) = \frac{3-x}{2x+1}$ c) $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ d) $F(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

4. $M\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Exercice 2

$36\sqrt{2}$ $4ab - 4ac = 4a(b-c)$ 2 $\frac{1}{x^2}$ $\frac{5^5}{2^8 \times 3^2}$ $-\frac{ab}{a-b}$

$5 \ln(2) + 2 \ln(3)$ $\frac{b^6}{c}$ $81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$

Exercice 3

$\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ $[-\sqrt{1-\ln(2)}, \sqrt{1-\ln(2)}]$ $\emptyset$ $\{0\}$ $] -4, 2[$ $] -\infty, 5[$ $\{e^{-3}, e^{\frac{3}{2}}\}$

Exercice 4

$f'_1(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ $f'_2(x) = \frac{\ln(x)-2}{(\ln(x)-1)^2}$ $f'_3(x) = \frac{(x-1)\ln(x-1)-x}{(x-1)\ln^2(x-1)}$

$f'_4(x) = \frac{3x-4}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ $f'_5(x) = \frac{x^4+2x^3+8x^2-2x-5}{(x^2+x+2)^2}$ $f'_6(x) = \frac{e^x(2x\ln(x)+\ln(x)+2)}{2\sqrt{x}}$

$f'_7(x) = \frac{e^x(x-2)-2}{(e^x+2)^2}$ $f'_8(x) = -\frac{2(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$ $f'_9(x) = \frac{4\ln(x)-1}{2x\sqrt{\ln(x)(2\ln(x)-1)}}$

$f'_{10}(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$