Chapitre 11 : Calcul matriciel et systèmes linéaires.

MPSI Lycée Camille Jullian

15 janvier 2026

Le possible est une matrice formidable.

Victor Hugo

Unfortunately, no one can be told what the Matrix is.
You have to see it for yourself.

Tagline du film Matrix (traduction en exercice).

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels, que nous aborderons au deuxième semestre), un chapitre plus orienté calcul sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : les matrices. Il s'agit ici simplement d'apprendre à calculer avec les matrices, mais aussi de voir le lien entre ces nouveaux objets et une autre notion que vous maîtrisez déjà : les systèmes d'équations linéaires, pour lesquels nous verrons une méthode de résolution systématique.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser le calcul matriciel, calculs de puissances ou d'inverse notamment.
- comprendre le fonctionnement de l'algorithme du pivot de Gauss, et savoir l'appliquer efficacement dans le cadre de l'inversion de matrices comme dans celui de la résolution de systèmes.

Introduction : un exemple ludique.

Pour introduire le concept de matrice et en particulier le produit matriciel (qui est l'opération la moins naturelle parmi celles que nous allons introduire dans ce chapitre), intéressons-nous au problème tout à fait concret suivant : dans un jeu video débile (qui a dit pléonasme ?), on peut composer des armées constituées de trois types de créatures, trolls, orcs et gobelins. Un élève de PTSI ayant trop de temps à perdre contitue lors d'une même soirée les trois armées suivantes :

	Trolls	Orcs	Gobelins
Armée 1	3	5	8
Armée 2	6	2	12
Armée 3	5	5	15

Mathématiquement, on considèrera que le tableau de nombres ainsi obtenu (sans les intitulés des lignes et colonnes, bien entendu) est justement ce qu'on appellera une matrice, ici une matrice trois lignes et trois colonnes que l'on notera $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 12 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix}$. Les bêbêtes constituant les troupes de nos armées étant assez gourmandes, il faudra les nourrir quotidiennement d'une certaine quantité d'huitres, d'humains et de poulets (régime alimentaire parfaitement adapté à ce genre de créatures, ne vous inquiétez pas). La quantité de nourriture ingurgitée par chaque type de créature est donnée, en unités par jour, dans le tableau suivant :

	Huitres	Humains	Poulets
Troll	10	3	8
Orc	8	4	10
Gobelin	2	6	2

On vient ainsi de définir une seconde matrice, trois lignes trois colonnes elle aussi. La question est alors fort simple : quelle quantité de chaque aliment le larbin chargé de faire les courses doit-il se procurer pour nourrir chacune des armées ? La réponse peut être obtenue en construisant le dernier tableau suivant :

	Huitres	Humains	Poulets
Armée 1	86	77	90
Armée 2	100	98	92
Armée 3	120	125	120

Le remplissage du dernier tableau découle d'un calcul assez simple. Pour trouver par exemple la valeur 86 de la première case, on a multiplié deux à deux les éléments de la première **ligne** du premier tableau (celle qui correspond à la première armée) par ceux de la première **colonne** du deuxième tableau (celle qui correspond aux huitres), et additionné le tout : $3 \times 10 + 5 \times 8 + 8 \times 2 = 86$. Les trois types de créatures qui étaient communs aux deux tableaux, ont disparu une fois ce calcul effectué. De même pour les autres éléments, on effectue à chaque fois le « produit » d'une ligne du premier tableau par une colonne du deuxième tableau. Eh bien, ce qu'on vient de faire, c'est exactement un produit de matrices. Cette opération en apparence peu naturelle quand on la présente de façon formelle (ce qu'on ne va pas tarder à faire) est donc en réalité très concrète. Elle interviendra systématiquement dès qu'on possède trois lots de données, deux tableaux exprimant la première donnée en fonction de la deuxième et la deuxième en fonction de la troisième, et qu'on cherche à exprimer directement la première donnée en fonction de la troisième (on reviendra sur cet aspect du calcul matriciel quand on reverra ces magnifiques objets dans le cadre des applications linéaires entre espaces vectoriels). Mathématiquement, on écrirait le calcul effectué dans cette introduction sous la forme : $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 12 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 3 & 8 \\ 8 & 4 & 10 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 77 & 90 \\ 100 & 98 & 92 \\ 120 & 125 & 120 \end{pmatrix}$. Notons pour conclure qu'il n'est absolument pas obligatoire d'avoir des tableaux de nombres ayant le même nombre de colonnes que de lignes pour effectuer le calcul. Ici, on aurait pu ajouter ou supprimer une armée (donc modifier le nombre de lignes de la première matrice), ou bien mettre au régime les monstres en leur supprimant leurs rations de poulet (une colonne en moins dans la deuxième matrice) sans que ça ne pose problème. Il est par contre indispensable que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la deuxième. Dernière remarque : faire le produit dans l'autre sens (multiplier les lignes du deuxième tableau par les colonnes du premier) n'aurait absolument aucun sens concret, et donnerait en tout cas un résultat bien différent de celui obtenu ici.

1 Les anneaux $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.1 Somme et produits.

Définition 1. Une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ (qui sera pour nous systématiquement le corps des réels ou celui des complexes) est un tableau rectangulaire (à n lignes et p colonnes) contenant np éléments de $\mathbb{K}$. On note un tel objet $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou de façon plus complète

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & \ddots & & m_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, m_{ij} est le terme de la matrice M se trouvant à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.

Définition 2. Une matrice à n lignes et p colonnes est aussi appelée **matrice de taille** (n, p). Une matrice est par ailleurs **carrée** si $n = p$ (on parle alors aussi de matrice carrée d'**ordre** n).

Définition 3. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 1. Dans le cas où $n = 1$, la matrice se réduit à une ligne, et on parle effectivement de matrice-ligne. De même, lorsque $p = 1$, on parlera de matrice-colonne. La notation est alors extrêmement similaire à celle utilisée pour désigner un élément de $\mathbb{K}^n$ par ses coordonnées dans une base, et on identifiera de fait souvent $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition 4. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la **somme** de A et de B est la matrice $A + B = C$, où $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
Il faut bien évidemment que les deux matrices aient la même taille (même nombre de lignes et de colonnes) pour pouvoir effectuer leur somme.

Définition 5. La **matrice nulle** $0_{n,p}$ (ou plus simplement 0 si les dimensions de la matrice sont claires dans le contexte) est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

Proposition 1. L'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.

Démonstration. Toutes les propriétés sont évidentes, elles découlent immédiatement des propriétés de la somme de réels, puisque la somme se fait terme à terme. □

Définition 6. Le **produit d'une matrice** A **par un élément** $\lambda \in \mathbb{K}$ est la matrice, notée λA, obtenue à partir de A en multipliant chacun de ses coefficients par λ.

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est **combinaison linéaire** des matrices A_1, A_2, ..., A_k si on peut écrire M sous la forme $M = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k$.

Proposition 2. Propriétés du produit d'une matrice par un réel :

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $1 \times A = A$
- compatibilité avec le produit dans $\mathbb{K}$: $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \times (\mu \times A) = (\lambda\mu) \times A$
- double distributivité par rapport aux sommes : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda + \mu) \times A = \lambda \times A + \mu \times A$, et $\forall(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \times (A + B) = \lambda \times A + \lambda \times B$.

Remarque 2. Ces propriétés du produit « extérieur » (par opposition au produit intérieur, c'est-à-dire au produit de deux matrices qu'on va définir juste après), cumulées aux propriétés de la somme de matrices, font de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ce qu'on appelera bientôt un **espace vectoriel réel**. On notera par ailleurs désormais ce produit sans utiliser de symbole de multiplication, sous la forme plus simple λA.

Définition 7. Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on note $E_{i,j}$ les matrices de la forme

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \\ \\ (L_i) \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3. Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de toutes les matrices $E_{i,j}$.

Démonstration. C'est évident, il suffit d'écrire que $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}E_{ij}$. On verra plus tard que cette propriété signifie que les matrices $E_{i,j}$ forment ce qu'on appelle une famille **génératrice** de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. □

Définition 8. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors le **produit** des deux matrices A et B est la matrice $A \times B = C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

Remarque 3. Cette définition correspond exactement à ce qu'on a vu dans notre exemple introductif : on multiplie terme à terme la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B et on somme le tout. Il faut faire très attention à ce que les tailles des matrices soient compatibles pour que le produit existe (nombre de colonnes de la première matrice égal au nombre de lignes de la deuxième).

Définition 9. La **matrice identité** de taille n est la matrice carrée $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4. Propriétés élémentaires du produit de matrices :

- Le produit de matrices est associatif : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $\forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, $(AB)C = A(BC)$.
- Le produit de matrices est distributif par rapport à la somme : pour toutes matrices de tailles compatibles, $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$.
- Les matrices identité jouent le rôle d'éléments neutres pour le produit : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $I_n A = A I_p = A$.
- Les matrices nulles sont des éléments absorbants pour le produit matriciel : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $0 \times A = 0$ et $A \times 0 = 0$.

Démonstration.

- Pour prouver l'associativité, il faut juste un peu de courage : considérons A, B et C ayant les dimensions indiquées. Si on note $D = (AB)C$, on peut alors écrire $d_{ij} = \sum_{k=1}^{q} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{q} (\sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk}) c_{kj}$. On peut écrire ceci plus simplement sous la forme d'une somme double $\sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj}$. De même, en notant $E = A(BC)$, on aura $E_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (\sum_{l=1}^{q} b_{kl} c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$. Les deux formules sont bien les mêmes puisque les indices dans une somme double sont muets (on inverse simplement le rôle des deux indices).
- C'est un calcul assez élémentaire sur les sommes : $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik} c_{kj}$. L'autre calcul est essentiellement identique.
- Pour cette propriété, on notera juste I et pas I_n par souci de lisibilité. Soit m_{ij} le terme d'indice i, j de la matrice produit IA. On a par définition $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} I_{ik} A_{kj}$. Mais le seul terme non nul parmi les I_{ik} est I_{ii}, qui vaut 1. On a donc bien $m_{ij} = A_{ij}$. Pour le produit à droite par I_p, la démonstration est la même.
- Bon, ça c'est vraiment trivial.

$\square$

Remarque 4. Attention aux gros pièges suivants quand on manipule le produit matriciel :

- Le produit de matrices n'est pas commutatif. En fait, l'existence du produit AB n'implique même pas celle de BA, mais même dans le cas des matrices carrées, par exemple, on a en général $AB \neq BA$.
- Parler de division de matrice n'a absolument aucun sens. Il faudrait en fait distinguer une division « à gauche » et une division « à droite ». En pratique, l'équivalent d'une division sera simplement obtenu en multipliant par la matrice inverse, à condition bien entendu qu'elle existe (voir plus loin dans ce même chapitre).
- On ne peut pas simplifier les produits : $AB = AC$ n'implique en général pas $B = C$, même si A n'est pas la matrice nulle (on peut en fait simplifier que si la matrice A est inversible, en multipliant chaque membre de l'égalité à gauche par A^{-1}). De même, $AB = 0$ n'implique absolument pas qu'une des deux matrices soit nulle.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A \times B = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$ et $B \times A =$

$\begin{pmatrix} 6 & -8 & 32 \\ 1 & 4 & -6 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ alors $A \times B = 0$ mais $B \times A = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$.

Proposition 5. L'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \dot{)}$ est un anneau non commutatif.

Démonstration. Il suffit de constater que le produit est bien une opération interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, toutes les propriétés qui en font un anneau ont déjà été prouvées. Remarquons que cet anneau n'est pas du tout un anneau intègre au vu des exemples donnés ci-dessus. □

Définition 10. Le **symbole de Kronecker** δ_{ij} vaut 1 lorsque $i = j$, 0 lorsque $i \neq j$.

Proposition 6. Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, son produit à gauche par la matrice $E_{i,j}$ est la matrice N dont les coefficients vérifient $N_{kl} = \delta_{ik} m_{kl}$. Le produit à droite par cette même matrice E_{ij} est la matrice P dont les coefficients vérifient $P_{kl} = \delta jl m_{kl}$.

Démonstration. Il n'y a qu'à écrire la formule, c'est évident. □

1.2 Transposition

Définition 11. La **transposée** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, où $m_{ij} = a_{ji}$. On la note $A^\top$. Autrement dit, les lignes de A sont les colonnes de $A^\top$ et vice-versa.

Proposition 7. La transposition vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AC)^\top = C^\top A^\top$.

Démonstration. Les trois premières propriétés ne posent aucun problème, mais la dernière est moins évidente. Écrivons ce que vaut le terme d'indice ij à gauche et à droite de l'égalité. Pour $(AC)^\top$, il est égal au terme d'indice ji de AC, c'est-à-dire à $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{jk} c_{ki}$. À droite, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} (C^\top)_{ik} (A^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} c_{ki} a_{jk}$. Les deux quantités sont bien égales. □

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ alors $A^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition 12. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** si $A\top = A$, c'est-à-dire si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{ij} = a_{ji}$. Elle est antisymétrique si $A^\top = -A$.

Remarque 5. Une matrice antisymétrique a donc une diagonale nécessairement nulle (alors que, pour une matrice symétrique, la diagonale est quelconque).

Définition 13. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple : on peut décomposer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Il suffit pour cela de poser $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice B est symétrique, C est antisymétrique, et on a bien $A = B + C$. En fait, cette décomposition est unique : par exemple on doit avoir $b_{13} + c_{13} = 3$ et $b_{31} + c_{31} = 7$, ce qui impose $b_{13} - c_{13} = 7$ puisque les matrices doivent être respectivement symétrique et antisymétrique. Ces deux conditions imposent $b_{13} = \dfrac{3+7}{2} = 5$ et $c_{13} = \dfrac{3-7}{2} = -2$, et on peut faire le même genre de raisonnement pour les autres coefficients. En fait, toute matrice carrée A peut être décomposée de cette façon (quelle que soit sa taille) en posant $B = \dfrac{A + A^\top}{2}$ et $C = \dfrac{A - A^\top}{2}$.

1.3 Puissances de matrices carrées.

Définition 14. Les puissances entières (positives) d'une matrice carrée sont définies par récurrence de la façon suivante : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^0 = I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = A \times A^n$.

Remarque 6. Une matrice commute toujours avec toutes ses puissances, on peut donc aussi écrire $A^{n+1} = A^n \times A$. Il est bien sûr indispensable que la matrice A soit carrée pour calculer ses puissances, sinon on ne peut même pas la multiplier par elle-même pour calculer son carré !

Définition 15. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonale** si $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Autrement dit, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Remarque 7. Les coefficients diagonaux de la matrice A (ceux qui sont sur la diagonale, donc) ont tout à fait le droit d'être nuls eux aussi. La matrice nulle de taille (n, n) est un exemple de matrice diagonale.

Proposition 8. Toutes les puissances d'une matrice diagonale sont diagonales. Plus précisément, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, on aura $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^n \end{pmatrix}$.

Démonstration. Récurrence triviale si on veut vraiment prouver cette propriété assez évidente. □

Définition 16. Une matrice carrée est **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$, ou encore si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$. On définit de même des matrices triangulaires inférieures par la condition $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Proposition 9. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure (et de même pour les matrices triangulaires inférieures). De plus, les coefficients diagonaux du produit sont les produits des coefficients diagonaux des deux matrices.

Démonstration. Prenons donc deux matrices triangulaires supérieures A et B et supposons $i > j$. Le terme d'indice ij du produit AB est égal à $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \times 0 = 0$. La matrice AB est donc triangulaire supérieure. $\square$

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -15 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Remarquez au passage que les termes diagonaux de $A \times B$ sont obtenus en effectuant le produit de ceux de A par ceux de B.

Exercice : Dans le cas d'une matrice quelconque de taille pas trop grande, il est fréquent de calculer ses puissances successives par récurrence. Voici un exercice-type sur ce sujet, les méthodes utilisées dans ce cas particulier peuvent facilement être généralisées à tout exercice du même genre. On pose donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis déterminer deux constantes réelles a et b telles que $A^2 = aA + bI_3$.
2. Montrer par récurrence l'existence de deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nA + b_nI_3$.
3. À l'aide des relations de récurrence obtenues à la question précédente, calculer explicitement a_n puis b_n en fonction de n.
4. En déduire la valeur de A^n, et donner en particulier A^7.

Solution :

1. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Les coefficients en-dehors de la diagonale ont été multipliés par -2 par rapport à ceux de A, donc $a = -2$. En observant ensuite la diagonale on trouve facilement $b = 3$ (on peut aussi écrire dès le départ un système, mais on évitera dans ce cas d'écrire les neuf équations issues des neuf coefficients de la matrice, on en écrit un nombre suffisant, habituellement deux, et on vérifie à la fin que la relation fonctionne aussi pour les coefficients restants).

2. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : A^n = u_nA + v_nI$. Au rang 0, il suffit de poser $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ pour que ça fonctionne puisque $A^0 = I_=0 \times A + 1 \times I_3$. De même, la propriété P_1 est vérifiée en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ (même si on n'a absolument pas besoin d'une initialisation double pour cette récurrence). Supposons maintenant le résultat vrai au rang n, on a alors $A^{n+1} = A^n \times A = (a_nA + b_nI_3)A = a_nA^2 + b_nA = a_n(-2A + 3I_3) + b_nA = (b_n - 2a_n)A + 3a_nI_3$. En posant $a_{n+1} = -2a_n + b_k$ et $b_{n+1} = 3a_n$, on a bien la forme demandée au rang $n+1$, d'où l'existence des coefficients a_n et b_n pour tout entier naturel n.
3. Nous avons obtenu à la question précédente des relations de récurrence qui permettent de faire le calcul suivant : $a_{n+2} = -2a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_{n+1} + 3a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 + 2x - 3 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc deux racines $r_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$, et $r_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$. On en déduit l'existence de deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha(-3)^n + \beta$. Or, $a_0 = \alpha + \beta = 0$ et $a_1 = -3\alpha + \beta = 1$, dont on tire $\alpha = -\dfrac{1}{4}$ en faisant la différence des deux équations, puis $\beta = \dfrac{1}{4}$. On a donc $a_n = \dfrac{1}{4}(1 - (-3)^n)$, puis $b_n = 3a_{n-1} = \dfrac{3}{4}(1 - (-3)^{n-1}) = \dfrac{3 + (-3)^n}{4}$.
4. Par construction, $A^n = \dfrac{1 - (-3)^n}{4}A + \dfrac{3 + (-3)^n}{4}I_3$. On peut écrire explicitement tous les coefficients de la matrice mais ça n'a pas vraiment d'intérêt. Contentons-nous, comme le demandait l'énoncé, d'expliciter A^7. On sait tous que $(-3)^7 = -2\ 187$, donc $A^7 = 547A - 546I_3 = \begin{pmatrix} 548 & -1\ 094 & 547 \\ 1\ 094 & -2\ 187 & 1\ 094 \\ -547 & 1\ 094 & -546 \end{pmatrix}$. Palpitant.

Définition 17. Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$.

Remarque 8. Les propriétés du produit matriciel font qu'il existe des quantités de matrices non nulles qui sont nilpotentes. Ainsi, une matrice triangulaire stricte (avec des 0 sur la diagonale) sera notamment toujours nilpotente. Une remarque en passant : si une matrice carrée d'ordre n est nilpotente, elle vérifie nécessairement $A^n = 0$ (pour l'entier n correspondant aux nombres de lignes et de colonnes de la matrice). C'est un théorème (hors-programme) loin d'être simple à démontrer.

Théorème 1. Formule du binôme de Newton, version matricielle.

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ deux matrices qui commutent, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $(A+B)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$.

Démonstration. Il ne s'agit que d'un cas particulier de la formule du binôme de Newton énoncée dans le cadre des anneaux. □

Exemple : On appliquera souvent cette formule dans le cas où l'une des deux matrices est diagonale, et l'autre nilpotente, ce qui en pratique réduit le nombre de termes de la somme à une quantité indépendante de n (et assez petite). Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on peut écrire $A = B + I_3$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $B^k = 0$ à partir de $k = 3$ (autrement dit, la matrice B est nilpotente). Les matrices I_3 et B commutant certainement, on peut appliquer la formule du binôme (en ne gardant que les trois premiers termes de la somme puisque tous les suivants seront nuls) : $A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = I_3 + n \times B + \frac{n(n-1)}{2} \times B^2$. On peut même facilement écrire les puissances explicites de A : $A^n \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n+2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 18. La **trace** d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 10. La trace est une application linéaire : pour des matrices de même taille, $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \,\mathrm{Tr}(A) + \mu \,\mathrm{Tr}(B)$.

La trace vérifie la formule $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Démonstration. La première propriété est complètement évidente. La deuxième l'est un peu moins. Calculons donc $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$. De même, $\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}$. Quitte à échanger le rôle des deux variables muettes i et j, c'est bien la même chose. $\square$

2 Inversion de matrices.

Définition 19. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. La matrice B est alors notée A^{-1} et on l'appelle **matrice inverse** de la matrice A. On note $GL_n(\mathbb{K})$ (et on appelle **groupe linéaire d'ordre** n) l'ensemble de toutes les matrices inversibles d'ordre n.

Remarque 9. La notion n'a bien sûr aucun sens dans le cas de matrices qui ne sont pas carrées. On retrouve encore une fois le vocabulaire défini de façon général dans les anneaux.

Exemple : L'inverse de la matrice I_n est bien sûr I_n elle-même. La matrice nulle n'est pas inversible, mais c'est loin d'être la seule dans ce cas. Ainsi, toute matrice contenant une ligne ou une colonne entière de zéros ne peut pas être inversible (si c'est une ligne de zéros par exemple, quand on calculera un produit du type AB, il restera toujours une ligne de zéros, il est donc impossible d'avoir $AB = I_n$).

Exemple : Cherchons à déterminer de façon très rudimentaire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ en exploitant naïvement la définition. On cherche donc une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2$ (dans ce cas, le produit dans l'autre sens sera automatiquement égal à I, comme on pourra le vérifier facilement). On trouve donc le système $\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & z & = & 1 \\ 2y & + & t & = & 0 \\ 3x & + & 2z & = & 0 \\ 3y & + & 2t & = & 1 \end{array} \right.$. La deuxième équation donne $t = -2y$, ce qui en reportant dans la dernière amène $y = -1$, et donc $t = 2$. La première équation donne $z = 1 - 2x$, soit en reportant dans la troisième $-x + 2 = 0$, donc $x = 2$, puis $z = -3$. Finalement, la matrice A est inversible, et son inverse est $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. On va très vite essayer de trouver des méthodes de calcul d'inverse plus efficace, car je doute que vous ayez envie de calculer l'inverse d'une matrice d'ordre 5 de cette façon.

Remarque 10. Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$.

Proposition 11. Principales propriétés calculatoires de l'inversion de matrices.

- Si A est inversible, son inverse est unique.
- Si A est inversible, alors A^{-1} aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ sont deux matrices inversibles, le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est une matrice inversible, A^k est inversible pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = I_n$, alors $BA = I_n$ et A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Démonstration. Tout a déjà été vu dans un anneau quelconque, mais ça ne fait pas de mal de refaire les démonstrations dans ce cas particulier.

- Supposons donc que A admette deux inverses distincts qu'on va noter B et C, autrement dit que $AB = BA = AC = CA = I_n$. On peut alors calculer $C(AB) = CI_n = C$, mais aussi $(CA)B = I_nB = B$. Le produit étant associatif, on trouve nécessairement $C = B$.
- C'est évident au vu de la définition de l'inverse.
- Vérifions que le produit de AB par ce que je prétends être son inverse donne bien l'identité : $ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$, dans l'autre sens c'est pareil.
- Sans faire une belle récurrence, constatons que $A \times \cdots \times A \times A^{-1} \times \cdots \times A^{-1} = I_n$ par simplifications successives « par le milieu ».
- C'est plus dur qu'il n'y parait, on va admettre ce résultat.

□

Remarque 11. Un des principaux intérêts de travailler avec des matrices inversibles est qu'on peut simplifier un peu plus naturellement certains calculs, notammant : si A est une matrice inversible et $AB = AC$, alors $B = C$ (il suffit de multiplier l'égalité à gauche par A^{-1} pour obtenir le résultat). Autre remarque utile : si A et B sont deux matrices non nulles telles que $AB = 0$, alors aucune des deux matrices n'est inversible (sinon, par l'absurde, en multipliant à gauche par l'inverse de A ou à droite par l'inverse de B, on constaterait que l'autre matrice est nulle).

Exemple : Le calcul d'inverse de matrices peut être grandement simplifié si on connait un polynôme annulateur de la matrice A (en pratique, si on arrive à exprimer par exemple A^2 en fonction de A et de I_n) : soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Un petit calcul permet d'obtenir $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et de constater que $A^2 = 2I_3 - A$, ce qu'on peut écrire $A + A^2 = 2I_3$, ou encore $\dfrac{1}{2}A(A+I_3) = I_3$. Ceci suffit à montrer que A est inversible et que son inverse est $\dfrac{1}{2}(A+I_3)$. Autrement dit, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Il est maintenant temps de donner une méthode algorithmique systématique pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée donnée (ou constater qu'elle n'est pas inversible le cas échéant). Cet algorithme, connu sous le nom de pivot de Gauss, est un peu lourd à décrire (et à appliquer aussi) mais représente la méthode la plus raisonnable pour calculer les inverses de façon efficace (et automatisable, c'est l'algorithme qui est implanté dans vos calculatrices par exemple). On retrouvera le même algorithme dans la dernière partie du cours pour la résolution de systèmes linéaires.

Définition 20. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice sont les suivantes :

- échange des lignes i et j, noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplication d'une ligne par une constante non nulle, noté $L_i \leftarrow aL_i$ ($a \neq 0$)
- combinaison des lignes i et j, noté $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ ($b \in \mathbb{K}$), qui n'est rien d'autre qu'une combinaison (d'où le nom) des deux opérations précédentes.

On peut définir de même des opérations élémentaires sur les colonnes, mais nous ne nous servirons que des lignes pour le pivot de Gauss. En pratique, on abusera légèrement du vocabulaire en effectuant des « combinaisons » qui sont en fait obtenues en combinant les deux derniers types d'opération, c'est-à-dire du type $L_i \Leftarrow aL_I + bL_j$.

Proposition 12. Chaque opération élémentaire sur les lignes d'une matrice A correspond à un produit à gauche de A par une matrice (inversible) donnée par le tableau situé sur la page suivante.

Théorème 2. Toute matrice inversible peut être transformée par une succession d'opérations élémentaires sur ses lignes en la matrice identité I_n.

Démonstration. Nous n'allons pas prouver ce théorème fondamental, mais simplement comprendre pourquoi il permet de donner une méthode pratique d'inversion. Nous allons décrire ensuite une procédure purement algorithmique permettant effectivement, à partir de la matrice A, d'arriver jusqu'à I_n par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice (ou plutôt sur les lignes des matrices successivement obtenues après chaque étape). Chacun de ces calculs correspond donc à un produit à une gauche par une matrice, notons (dans l'ordre où on effectue les étapes) B_1, B_2, ..., B_k les matrices correspondantes. On a donc, par construction, $B_k \times B_{k-1} \times \cdots \times B_2 \times B_1 \times A = I_n$. Mais alors, la matrice A est effectivement inversible, et $A^{-1} = B_k \times \cdots \times B_2 \times B_1$. Il suffit donc de reprendre exactement les mêmes opérations élémentaires (dans le même ordre) à partir de la matrice I_n pour obtenir la matrice A^{-1}. □

Opération sur les lignes du système	Produit de la matrice A par :
Échange $L_i \leftrightarrow L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Produit par un réel $L_i \leftarrow \alpha L_i$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Combinaison linéaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ (L_i) \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \dots & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 21. Les matrices dont le produit permet d'effectuer les opérations élémentaires sont (pour cette raison) appelées **matrices élémentaires**. En particulier, les matrices correspondant aux opérations $L_i \leftarrow aL_i$ sont appelées **matrices de dilatation** et les matrices correspondant aux opérations de combinaison sont appelées **matrices de transvection**.

Algorithme du pivot de Gauss : Pour inverser une matrice carrée A, on effectue en pratique successivement les opérations suivantes :

- Si besoin est, on échange la ligne L_1 avec une ligne L_i sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul (s'il n'y a pas de tel coefficient non nul, la matrice contient une colonne entièrement nulle et ne peut pas être inversible).
- À l'aide de combinaisons du type $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$, on annule tous les coefficients a_{i1}, pour $i \geqslant 2$ (on peut le faire car a_{11}, qui sera appelé pivot de l'opération, est désormais non nul).
- On reprend l'algorithme sur la sous-matrice carrée formée des $n-1$ dernières lignes et colonnes, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.

- Si la matrice triangulaire obtenue a (au moins) un coefficient diagonal nul, elle n'est pas inversible, et la matrice A non plus. Sinon, on est certains à cette étape que la matrice est inversible.
- On annule ensuite les coefficients au-dessus de la diagonale à l'aide de pivots situés sur la diagonale, mais en commençant cette fois par annuler la dernière colonne (à l'aide du coefficient a_{nn}), puis l'avant-dernière (à l'aide de $a_{n-1,n-1}$) etc, de façon à ne pas faire réapparaitre de coefficients non nuls ailleurs que sur la diagonale.
- On obtient finalement une matrice diagonale, il ne reste qu'à multiplier chaque ligne par une constante pour trouver l'identité.
- On reprend les mêmes opérations (ou on les effectue en parallèle) en partant de la matrice identité pour déterminer A^{-1}.

Nous allons calculer l'inverse de la matrice suivante en utilisant le pivot de Gauss : à gauche, les opérations sur la matrice A, à droite les mêmes opérations à partir de I_3 pour obtenir l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -L_2 \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Conclusion de ce long calcul : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 22. Deux matrices sont **équivalentes par lignes** si on peut passer de l'une à l'autre par opérations élémentaires sur les lignes. On le note $A \sim_L B$. Remarquons qu'une matrice A est inversible si et seulement si $A \sim_L I_n$.

3 Systèmes linéaires.

Nous ne revenons pas sur le vocabulaire de base associé aux systèmes linéaires, qui a déjà été vu dans le chapitre 5.

Définition 23. La **matrice associée** à un système $\mathcal{S}$ de n équations à p inconnues est la matrice de ses coefficients $A = (a_{ij})$. Si on note également les inconnues sous forme de matrice-colonne

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, ainsi que le second membre $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système est alors simplement équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.

Définition 24. Un système linéaire est **carré** si sa matrice associée est carrée (il a donc autant d'inconnues que d'équations). De même, il est dit **triangulaire** si la matrice associée est triangulaire (généralement triangulaire supérieure), auquel cas sa résolution peut se faire facilement en « remontant » le système.

Théorème 3. Un système linéaire carré est de Cramer si et seulement si sa matrice associée A est inversible. Dans ce cas, l'unique solution du système est donnée par $X = A^{-1}B$.

Remarque 12. Autrement dit, le fait qu'un système ait une solution unique ou non ne dépend que des coefficients de chaque équation, mais pas de son second membre.

Démonstration. Il y a un sens évident : si la matrice est inversible, il suffit de multiplier l'égalité $AX = B$ à gauche par A^{-1} pour obtenir le résultat. L'autre sens ne sera pas démontré, il découle de l'algorithme du pivot de Gauss que nous allons décrire ci-dessous. □

Définition 25. Un système linéaire est **homogène** si tous les coefficients apparaissant dans son second membre (ceux que nous avons noté b_i un peu plus haut) sont nuls. Le **système homogène associé** à un système d'équations linéaires est le système obtenu en remplaçant chaque second membre par 0.

Remarque 13. Vous ne manquerez pas de remarquer la similarité de vocabulaire entre les systèmes linéaires et les équations différentielles linéaires. Ce n'est pas un hasard du tout, il y a effectivement un regroupement théorique possible entre ces notions a priori assez éloignées. Sans rentrer dans les détails (on aurait bien du mal pour l'instant), l'ensemble des solutions est dans les deux cas un sous-espace affine (non, non, je ne vous définirai pas ce que c'est), ce qui revient à dire qu'on peut les décrire par le schéma suivant : toutes les solutions sont obtenues en faisant la somme d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène associée.

Définition 26. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système sont les mêmes que celle que nous avons définies sur les matrices.

Proposition 13. Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système le transforment en système équivalent.

Algorithme du pivot de Gauss sur les systèmes : L'algorithme est rigoureusement le même que pour l'inversion des matrices, à ceci près qu'on a en pratique beaucoup moins de travail. On se contente en effet d'effectuer la première phase du pivot de Gauss pour transformer le système en système triangulaire, et surtout on n'a pas besoin de faire deux fois les opérations comme dans un pivot de Gauss matriciel classique.

Exemple : nous allons résoudre un système à 4 équations et 4 inconnues en suivant scrupuleusement l'algorithme décrit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \\
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \qquad L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\
2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 & \qquad L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\
-x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 & \qquad L_4 \leftarrow L_1 + 3L_4
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \\
 & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 & \\
 & & 11y & & & + & t & = & 26 & \qquad L_3 \leftarrow 11L_2 - 7L_3 \\
 & & y & + & 12z & - & 7t & = & -26 & \qquad L_4 \leftarrow L_2 - 7L_4
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \\
 & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 & \\
 & & & & -66z & + & 48t & = & 192 & \\
 & & & & -90z & + & 54t & = & 216 & \qquad L_4 \leftarrow 90L_3 - 66L_4
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\
 & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\
 & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\
 & & & & & & 756t & = & 3024
\end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $t = 4$, puis $-66z = 192 - 48t = 0$, donc $z = 0$, $7y = 34 + 6z - 5t = 14$ donc $y = 2$, et enfin $3x = 7 - y + 3z - 2t = -3$ donc $x = -1$. Le système a donc une unique solution : $\mathcal{S} = \{(-1, 2, 0, 4)\}$.

On ne peut qu'être un peu frustré d'avoir fait des calculs si compliqués pour une solution aussi simple. On peut en fait les réduire grandement en utilisant le pivot de façon plus subtile, c'est-à-dire en choisissant un bon pivot à chaque étape. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 & \\
-x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 &
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \qquad L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\
2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 & \qquad L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\
-x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 & \qquad L_4 \leftarrow L_1 + L_4
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
 & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 & \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 & \\
 & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 &
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 & \\
 & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 & \qquad L_3 \leftarrow 7L_2 - L_3 \\
 & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 & \qquad L_4 \leftarrow 2L_2 - L_4
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 & \\
 & & & & 22z & - & 16t & = & -64 & \\
 & & & & 2z & - & 2t & = & -8 & \qquad L_4 \leftarrow L_3 - 11L_4
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\
 & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\
 & & & & & & 6t & = & 24
\end{array}\right.$$

On retrouve bien évidemment la même solution que tout à l'heure.

Il existe d'autres façons de résoudre les systèmes, ou plutôt d'autres façons de présenter le même calcul. On peut évidemment faire un calcul d'inverse de la matrice A associée au système puis calculer $A^{-1}B$, mais c'est extrêmement lourd dans la mesure où le pivot de Gauss matriciel demande déjà de faire deux fois les mêmes opérations sur les lignes, à partir de A et à partir de I_n. Pour éviter cela, il existe une possibilité, c'est de regrouper les deux calculs en un seul :

Définition 27. La **matrice augmentée** associée au système, et notée $(A \mid B)$, est simplement la matrice à p lignes et $n+1$ colonnes obtenues en rajoutant à la matrice A une dernière colonne égale à la matrice B (on sépare en pratique la « vraie » matrice du second membre en matérialisant une barre verticale au milieu de la matrice).

Exemple : Si on souhaite résoudre un système à l'aide de la matrice augmentée, on effectue le pivot en cherchant à transformer ce qui se trouve à gauche de la barre verticale en I_n (et en modifiant simultanément la dernière colonne ajoutée), et les valeurs obtenues sur la dernière colonne une fois la transformation terminée seront tout simplement les valeurs prises par les différentes inconnues dans l'unique solution du système. Il est par ailleurs tout à fait possible d'utiliser une rédaction « mixte » où on commence les calculs avec une matrice augmentée, puis on revient à un système pour terminer la résolution (par exemple une fois que la partie gauche de la matrice augmentée est devenue triangulaire). Prenons un exemple pas trop méchant avec le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 3 & | & -6 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow -L_2/3 \\ L_3 \leftarrow L_3/3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

On peut simplement conclure que le système a pour unique solution $\{(1, 2, 0)\}$.

Remarque 14. On peut bien sûr également utiliser, de façon symétrique, les techniques de résolution de systèmes pour inverser des matrices. Ainsi, on pourra écrire une matrice augmentée dont les deux moitiés sont carrées pour calculer l'inverse d'une matrice A plutôt que de faire deux fois les mêmes opérations à partir de A et de I_n (méthode qui a le très léger inconvénient de faire faire quelques calculs inutiles dans la deuxième partie de la matrice augmentée quand la matrice n'est **pas** inversible).

On peut même effectuer une « vraie » résolution de système pour inverser une matrice : on part du système ayant pour matrice A et un second membre inconnu B (par exemple, si la matrice est carrée d'ordre 3, on notera a, b et c les trois valeurs du second membre), et on résout le système, c'est-à-dire qu'on exprime x, y et z en fonction de a, b et c. Les coefficients obtenus seront alors ceux de A^{-1} (puisqu'on a transformé une équation matricielle de la forme $AX = B$ en $X = A^{-1}B$). Cette méthode est particulièrement rapide si on est à l'aise avec les opérations « efficaces » sur les systèmes.

Exemple : Calculons par exemple l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c'est la matrice du système résolu dans l'exercice précédent) avec cette méthode. On part donc du système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & a \\ 2x & - & y & + & z & = & b \\ 2x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$ et on effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ pour obtenir immédiatement le système triangulaire $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & a \\ & - & 3y & + & 3z & = & b - 2a \\ & & & & 3z & = & c - 2a \end{array}\right.$. On peut donc simplement remonter le système : $z = -\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}c$, puis $y = \dfrac{2a - b}{3} + z = -\dfrac{1}{3}b + \dfrac{1}{3}c$ et enfin $x = a + z - y = \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{3}b$. Il ne reste plus qu'à mettre les coefficients (dans le bon ordre) dans une matrice pour conclure que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.