Feuille d'exercices n° 20 : séries, familles sommables

MPSI Lycée Camille Jullian

2 avril 2026

Exercice 1 (* à ***)

Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

- $\sum \frac{n-1}{3^n}$
- $\sum \frac{1}{2^{2n+1}}$
- $\sum \frac{3+n2^n}{4^{n+2}}$
- $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{3^n}$
- $\sum e^{-nx}$
- $\sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$
- $\sum \frac{4(-1)^n}{n!}$
- $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- $\sum \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$
- $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$
- $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$
- $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
- $\sum \frac{1}{4n^2-1}$
- $\sum \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$
- $\sum \binom{n}{p} x^n$

Pour la dernière série, p est un entier fixé et x un réel appartenant à $]-1,1[$.

Exercice 2 (**)

Soit u_n une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$.

1. Montrer que la suite u_n est convergente et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, calculer la somme partielle de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{n+1}.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 3 (*)

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un équivalent simple du reste d'indice n de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$. Si on est courageux, on généralisera pour la série de terme général $\frac{1}{n^k}$.

Exercice 4 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.
3. Prouver que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 5 (* à **)

Étudier la nature de chacune des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

- $\sum \frac{1}{n^2 - n}$
- $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$
- $\sum \frac{1}{n^3 + 2^n}$
- $\sum \ln \frac{n^2 + n^4}{2n^4}$
- $\sum \sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$
- $\sum \frac{\ln n}{3^n}$
- $\sum \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+3n)}$
- $\sum \frac{n^2}{n!}$
- $\sum \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
- $\sum \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
- $\sum \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$
- $\sum \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$
- $\sum \ln \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2n}$
- $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
- $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$

Les dernières séries de l'exercice sont connues sous le nom de séries de Bertrand.

Exercice 6 (**)

En admettant que $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\zeta(4) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, calculer les valeurs des sommes suivantes :

- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$
- $\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{k^2n^2}$
- $\sum_{1\leqslant k<n} \frac{1}{k^2n^2}$
- $\sum_{k|n} \frac{1}{k^2n^2}$
- $\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{(-1)^{kn}}{k^2n^2}$
- $\sum_{k\wedge n=1} \frac{1}{k^2n^2}$

.

Exercice 7 (**)

1. Montrer qu'il n'existe aucun entier naturel n tel que $\sin^2(n) \leqslant \frac{1}{2}$, $\sin^2(n+1) \leqslant \frac{1}{2}$ et $\sin^2(n+2) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire la nature de la série $\sum \frac{\sin^2(n)}{n}$.

Exercice 8 (**)

1. Prouver la convergence de la série de terme général $\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.
2. Comparer ce terme général avec $\arctan(n+1) - \arctan(n)$.
3. En déduire la valeur de la somme de la série étudiée.

Exercice 9 (**)

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que la série de terme général $a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1}$ soit convergente. Indice : un peu de révision de développements limités ne peut pas vous faire de mal.
2. Même question pour la série de terme général $\sqrt{n^2+4n+1} - \left(an + b + \frac{c}{n}\right)$ (et même indice !).
3. Vous êtes tellement bien partis que vous allez maintenant déterminer la nature de la série de terme général $\sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$ en fonction du réel a.

Exercice 10 (***)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ pour un certain réel $\alpha > 1$.

1. Montrer que, si $\beta < \alpha$, la suite $(n^\beta u_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ converge (c'est la règle de Raabe-Duhamel-Darboux).
3. Étudier la nature de la série $\sum \dbinom{2n}{n} \dfrac{1}{n \times 2^{2n}}$.

Exercice 11 (***)

Déterminer pour chacune des familles suivantes si elle est sommable ou non :

1. $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p \geqslant 2}$
2. $\left(\dfrac{1}{n^2 - p^2}\right)_{n,p \geqslant 1, n \neq p}$
3. $\left(\dfrac{1}{r^2}\right)_{r > 1, r \in \mathbb{Q}}$
4. $\left(\dfrac{z^{pq}}{p!q!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$, selon la valeur de $z \in \mathbb{C}$

Exercice 12 (*)

Déterminer les sommes des familles suivantes (en précisant éventuelles les conditions à imposer sur les variables $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ pour assurer la sommabilité) :

- $\displaystyle\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{z^p}{q!}$
- $\displaystyle\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{z^p z'^q}{p!q!}$
- $\displaystyle\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{q^p z^p}{p!q!}$
- $\displaystyle\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \binom{p+q}{p} z^{p+q}$

Exercice 13 (**)

Calculer les sommes suivantes (la dernière valeur est à donner en fonction de $\zeta(3)$) :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$

Problème 1 (***)

On note dans cet exercice E l'ensemble de toutes les suites (p_n) croissantes (mais pas forcément strictement) d'entiers naturels telles que $p_0 \geqslant 2$. Pour une suite (p_n) appartenant à E, on s'intéresse à la série (S_n) de terme général $\dfrac{1}{p_0 \dots p_n}$. Autrement dit, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\prod_{i=0}^{k} p_i}$.

1. Commençons par étudier quelques cas particuliers :
   (a) Dans le cas où la suite (p_n) est constante égale à 2, reconnaitre la série (S_n), et en déduire sa convergence, ainsi que la valeur de sa somme.
   (b) Généraliser au cas d'une suite (p_n) constante égale à p, pour un certain entier naturel $p \geqslant 2$.
   (c) Supposons désormais que $p_n = n + 2$, reconnaître à nouveau la série (S_n), et prouver sa convergence vers une somme à déterminer. Vérifier que cette somme appartient à l'intervalle $]0, 1]$.
   (d) En supposant désormais que $p_n = 2n + 2$, prouver que le terme général de la série (S_n) est égal à $\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$, en déduire la convergence et la somme de la série (S_n). Vérifier à nouveau que la somme appartient à $]0, 1]$.
2. Dans le cas général, prouver que la série (S_n) est toujours convergente, et que sa somme appartient à $]0, 1]$. On notera désormais $S(p)$ la somme de la série associée à la suite $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Montrer que l'application $S : E \to]0,1]$ est une application injective (on pourra commencer par constater que, si $p_0 > q_0$, alors $S(p) < S(q)$).
4. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]0,1]$. On construit à partir de x la suite (y_n) de la façon suivante : $y_0 = x$ et $\forall n \geqslant 1$, $y_{n+1} = p_n y_n - 1$, où $p_n = \text{Ent}\left(1 + \dfrac{1}{y_n}\right)$.
   (a) Déterminer les premiers termes des suites (y_n) et (p_n) lorsque $x = \dfrac{3}{7}$ (calculez jusqu'à ce qu'il se produise quelque chose de remarquable, ce qui devrait arriver vite). Calculer $S(p)$ pour la suite (p_n) ainsi obtenue.
   (b) Dans le cas général, montrer que (y_n) est une suite décroissante d'éléments de $]0,1]$.
   (c) En déduire que (p_n) vérifie toujours les hypothèses posées en début d'exercice.
   (d) Exprimer x en fonction de p_0, p_1, …, p_n et y_n, et en déduire la valeur de $S(p)$ lorsque $p = (p_n)$. Conclure que S est une application bijective de E dans $]0,1]$.

Problème 2 (***)

Le but de ce problème est d'améliorer le résultat du cours sur la série harmonique (H_n) qui, rappelons-le, est définie par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On sait déjà que $H_n \sim \ln(n)$ (ce résultat est supposé déjà connu et donc utilisable si besoin dans ce problème), et on va désormais étudier la suite (u_n) définie par $u_n = H_n - \ln(n)$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. En déduire la convergence de (u_n) vers une limite qu'on notera désormais γ (on pourra reprendre le schéma de la démonstration du cours concernant l'équivalent de la série harmonique pour minorer u_n). Montrer que $\gamma \in [0,1]$.
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Pour tout entier $k \neq 0$, on pose
   $$I_k = \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\ dt.$$
   (a) Montrer que $I_k = \dfrac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \dfrac{f(k+1) + f(k)}{2} + \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ dt$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\ dt - \sum_{k=1}^{n-1} I_k$.
   (c) On suppose désormais qu'on a posé $f(x) = \dfrac{1}{x}$, montrer que $0 \leqslant I_k \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3}\ dt$ pour tout $k \geqslant 1$.
   (d) En déduire que la série $\sum I_k$ converge, puis montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} I_k = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (e) En déduire enfin que $H_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
4. (a) Soit $\alpha > 1$, montrer que, si $k \geqslant 2$, alors $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\ dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$.
5. Montrer que, si la série $\sum a_n$ converge, que $a_n > 0$ et $a_n \sim b_n$, alors la série $\sum b_n$ converge (ça c'est du cours) et surtout les restes sont équivalents : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.
6. On pose désormais $x_n = u_n - \dfrac{1}{2n}$.
   (a) Montrer que $\gamma - x_n = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$.
   (b) En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.