

Feuille d'exercices n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 septembre 2025

Exercice 1 (* à **)

- $f(x) = 0$ n'aura pas de solution si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ (comme toujours, une négation dans un énoncé quantifié est portée par la propriété elle-même et pas par la quantification).
- f est constante se traduit par exemple par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y)$; ou par $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a$. Notez que $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$ marche aussi (alors que ça semble moins fort que la première proposition).
- tout réel a (au moins) un antécédent par f si $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = a$.
- f ne prend pas de valeur négative si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ (ça, c'est assez facile, mais il faut faire attention à un détail pénible en français, le fait que le terme « négatif » soit ambigu, a priori la valeur 0 est incluse si on ne précise pas « strictement négatif »).
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f si $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \neq x \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que x et y soient distincts).
- f ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \neq x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$. On peut également proposer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
- la courbe de f coupe celle de la fonction $\ln$ si $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(x)$ (aucune raison de préciser dans la quantification que x doit être strictement positif, il le sera de toute façon).

Exercice 2 (*)

1. Je n'ai pas choisi de faire une MPSI, je ne suis donc pas un génie des mathématiques.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$.
3. Je vais réussir l'exercice, donc je sais écrire une contraposée.
4. S'il existe un entier naturel n tel que $u_n > u_{n+1}$, alors la suite (u_n) n'est pas croissante.
5. M.Lafon ne mettra pas que des mauvaises notes au premier DS, donc il existe des roux qui ne sont pas sadiques.

Exercice 3 (**)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2$: FAUX, $x = 0$ est un des nombreux contre-exemples évidents.
2. $\exists n \in \mathbb{N}, 2 < n < 4$: VRAI, l'entier 3 convient (et c'est d'ailleurs le seul).
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$: FAUX, ça ne marche pas si $x \in]0, 1[$, par exemple $x = \frac{1}{2}$.
4. $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$: VRAI (en admettant que x et y sont des réels), on peut toujours prendre par exemple $y = \frac{x}{2}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 2n$: VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 2, et le résultat sera toujours un entier naturel.
6. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$: FAUX, ce n'est vrai que si n est pair.

7. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n(n+1) = 2p$: VRAI, cela revient à dire que $n(n+1)$ est toujours pair. En effet, parmi n et $n+1$, l'un des deux nombres est pair et l'autre impair, on obtient donc un nombre pair en faisant leur produit.
8. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y^2$: VRAI, pour le coup, tous les x strictement négatifs sont des exemples.
9. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, y = \ln(x)$: FAUX, la fonction $\ln$ n'est même pas définie sur $\mathbb{R}$, et même quand elle est définie, $\ln(x)$ n'est pas toujours strictement positif.
10. un peu de calcul est ici nécessaire : posons $y \neq \frac{1}{2}$ et essayons de résoudre l'équation $\frac{x+1}{2x-1} = y$. Elle est équivalente (on a déjà supposé $x \neq \frac{1}{2}$) à $x+1 = 2xy - y$, soit $1+y = x(2y-1)$. On constate que cette équation admet une solution dès que $y \neq \frac{1}{2}$, ce qui prouve que la propriété proposée est VRAIE. Notons en passant que $x = \frac{y+1}{2y-1}$, on a donc « la même formule » que celle exprimant y en fonction de x . Cela revient en fait à dire que la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{2x-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ est sa propre réciproque.
11. le dernier énoncé est VRAI mais pas évident à prouver. Il existe nécessairement un entier n pour lequel $\frac{1}{n} < y - x$, puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et $y - x > 0$. Notons alors p le plus grand entier relatif pour lequel $\frac{p}{n} < y$. Un tel entier existe toujours, il sera positif si y l'est et négatif dans le cas contraire. Par définition de p , $\frac{p}{n} < y$, mais on peut aussi constater que $\frac{p}{n} > x$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $\frac{p}{n} \leq x$, donc $\frac{p+1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y$, ce qui contredirait la définition de l'entier p (ce ne serait plus le plus grand entier vérifiant la condition donnée). Le nombre rationnel $\frac{p}{n}$ est donc strictement compris entre x et y , il satisfait la propriété qu'on voulait prouver.

Exercice 4 (*)

C'est extrêmement mécanique et peu palpitant :

- $\exists x \in \mathbb{R}, x < 2$
- $\forall x \in \mathbb{N}, x \in]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x$
- $\exists x > 0, \forall y > 0, x \leq y$
- $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \neq 2n$
- $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \neq 2p$
- $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n(n+1) \neq 2p$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, y \neq \ln(x)$
- $\exists y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, \frac{x+1}{2x-1} \neq y$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y > x, \forall z \in \mathbb{Q}, z \leq x \text{ ou } z \geq y$

Exercice 5 (*)

- Commençons par constater que $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$, donc $B = [-5, 5]$.
- Sans difficulté, $A \cup B = [4, 7] \cup [-5, 5] = [-5, 7]$.
- L'ensemble $A \cap C$ est constitué des nombres entiers naturels appartenant à A , donc $A \cap C = \{4, 5, 6, 7\}$. On peut noter ce genre d'ensemble sous la forme $\llbracket 4, 7 \rrbracket$.

- Un exemple élémentaire de différence, on fait attention au sens des crochets : $[-2, 12] \setminus B =]5, 12]$.
- Pour déterminer $A \cap \overline{C}$, il faut enlever dans l'ensemble A tous les nombres qui appartiennent à C , c'est-à-dire qui sont des entiers naturels : $A \cap \overline{C} =]4, 5[\cup]5, 6[\cup]6, 7[$.
- L'ensemble $(A \cup B) \cap C$ est constitué des entiers relatifs appartenant à $A \cup B$, ensemble calculé plus haut, donc $(A \cup B) \cap C = \llbracket 0, 7 \rrbracket$.
- $A \cup (B \cap C) = [4, 7] \cup \llbracket 0, 3 \rrbracket$ (inutile d'inclure les entiers 4 et 5 dans le deuxième ensemble puisque ceux-ci sont déjà inclus dans le premier intervalle).
- $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap C) =]-\infty, -5[\cup]7, +\infty[\cup \llbracket 0, 3 \rrbracket$ (inutile d'inclure une deuxième fois les entiers strictement plus grands que 7).

Exercice 6 (**)

1. Un simple dessin suffit à se convaincre que l'union va être égale à E tout entier. On peut le prouver de plusieurs façons différentes :
 - prendre un élément x appartenant à E , et distinguer quatre cas selon son appartenance ou non à A et à B . Chacune des quatre possibilités résulte en l'appartenance de x à exactement un des quatre ensembles dont on calcule l'union, qui est donc égale à E tout entier.
 - faire une table de vérité, qui ne contiendra ici que quatre lignes mais un certain nombre de colonnes.
 - plus simplement, utiliser les propriétés des opérations élémentaires sur les ensembles : par distributivité, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$, et de même $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A}$, donc l'union recherchée est égale à $A \cup \overline{A} = E$.
2. Pour changer un peu, faisons cette fois-ci une table de vérité, en notant C l'ensemble qu'on cherche à calculer (j'ai enlevé les « $x \in$ » dans les intitulés des colonnes pour réduire un peu la taille du tableau) :

A	B	$(A \cap B)$	$(A \cup \overline{B})$	$(\overline{A} \cap B)$	$(A \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	C
V	V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V

On constate finalement que $C = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, puisque le crochet qui précède est en fait égal à E tout entier.

Exercice 7 (**)

On va procéder par double inclusion. L'inclusion la plus simple est $B \subset A$. En effet, si $z = (t - 1, 5 - 2t) \in B$, alors z est bien un élément de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie l'équation $2x + y = 3$ puisque $2(t - 1) + 5 - 2t = 2t - 2 + 5 - 2t = 3$, donc $z \in A$, ce qui prouve bien que $B \subset A$. Procédons maintenant en sens inverse : si $(x, y) \in A$ vérifie l'équation $2x + y = 3$, on peut alors poser $t = x + 1$ (ce choix n'est évidemment pas arbitraire, si on compare les descriptions des ensembles A et B , on voit qu'on doit avoir $t - 1 = x$), et calculer $5 - 2t = 5 - 2(x + 1) = 3 - 2x = y$, donc le couple (x, y) est égal au couple $(t - 1, 5 - 2t)$, ce qui prouve que $A \subset B$ et achève la démonstration.

Exercice 8 (**)

1. Supposons donc que $B \subset C$, et considérons un élément x appartenant à $A \cup B$. Deux possibilités : soit $x \in A$, et donc $x \in A \cup C$, soit $x \in B$, et alors $x \in C$ puisque $B \subset C$, donc

$x \in A \cup C$. Dans tous les cas, $x \in A \cup C$, ce qui prouve bien que $(A \cup B) \subset (A \cup C)$.

2. On va raisonner par contraposée. Si $B \neq C$, cela signifie qu'il existe un élément x appartenant à l'un des deux ensembles mais pas à l'autre, par exemple $x \in B$ et $x \notin C$ (l'autre cas est complément symétrique). On distingue alors deux cas :

- si cet élément x appartient à A , il appartient donc à $A \cap B$, mais pas à $A \cap C$, ce qui prouve que $A \cap B \neq A \cap C$.
- si cet élément x n'appartient pas à A , il appartient à $A \cup B$, mais pas à $A \cup C$, ce qui prouve que $A \cup B \neq A \cup C$.

Dans les deux cas, l'une des hypothèses de notre implication est fausse, ce qui prouve sa contraposée, et donc l'implication elle-même.

3. Supposons pour commencer l'égalité $A \cup B = A \cup C$ vérifiée, et essayons de prouver que $A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$. Pour cela, on va procéder comme souvent par double inclusion. Soit $x \in A \cup \overline{B}$, il y a deux possibilités : si $x \in A$, on aura a fortiori $x \in A \cup \overline{C}$; et si $x \notin A$, alors $x \in \overline{B}$, donc $x \notin B$. Mais alors $x \notin A \cup B$, ce qui implique $x \notin A \cup C$ d'après notre hypothèse initiale. On a donc $x \notin C$, et par conséquent $x \in A \cup \overline{C}$. Ouf, on a prouvé que $A \cup \overline{B} \subset A \cup \overline{C}$. L'inclusion réciproque se fait exactement de la même façon puisque les deux ensembles B et C jouent un rôle exactement symétrique dans cet exercice. Nous avons donc prouvé l'implication « gauche vers droite » de l'équivalence à prouver. On va en fait s'arrêter là, car l'implication réciproque dit exactement la même chose, en inversant le rôle des ensembles B et C et de leurs complémentaires. Comme la preuve qu'on vient de faire est valable pour des sous-ensembles quelconques, elle s'adapte sans problème à $\overline{B}$ et $\overline{C}$, et il y a bien équivalence.
4. Ici, l'utilisation de propriétés de distributivité ne fonctionne pas très bien, on n'arrive pas à simplifier les expressions des deux membres de l'égalité. En fait ce n'est pas vraiment nécessaire : un élément x appartient au membre de gauche de l'égalité si et seulement si il appartient à au moins deux des ensembles A , B et C . En effet, s'il appartient à deux des trois ensembles, il sera dans l'une des trois intersections $A \cap B$, $A \cap C$ ou $B \cap C$, et donc dans leur union. Inversement, s'il n'appartient qu'à un seul des ensembles (ou à aucun), il ne sera dans aucune des trois intersections (il y aura toujours au moins un des deux ensembles de l'intersection auquel il n'appartient pas), et donc pas non plus dans la réunion. Intéressons-nous maintenant au membre de droite : un élément qui appartient aux trois ensembles A , B et C sera manifestement dans l'intersection proposée ; s'il appartient à deux ensembles sur les trois aussi, puisqu'il appartiendra alors à chacune des trois unions dont on fait l'intersection. Mais s'il n'appartient qu'à un seul des trois (ou aucun), par exemple à A , il n'appartiendra pas à l'une des unions (ici à $B \cup C$) et donc pas non plus à l'intersection proposée. Les éléments des deux membres de l'égalité sont donc bien les mêmes.

Si on préfère, une bonne vieille table de vérité fonctionne bien ici (on a noté « gauche » et « droite » pour indiquer les membres de gauche et de droite de l'égalité qu'on cherche à prouver) :

A	B	C	$(A \cap B)$	$(A \cap C)$	$(B \cap C)$	gauche	$(A \cup B)$	$(A \cup C)$	$(B \cup C)$	droite
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Exercice 9 (**)

1. Un élément appartenant à $A_i \times B$ est un élément de la forme (x_i, y) , avec $x_i \in A_i$ et $y \in B$. Un élément appartient donc à l'ensemble de gauche de notre égalité s'il est de la forme (x, y) , avec x appartenant à (au moins) l'un des ensembles A_i . C'est exactement la même chose pour l'ensemble de droite.
2. Un couple (x, y) appartient à $A_i \times B_i$ si $x \in A_i$ et $y \in B_i$. Pour que ce même couple appartienne à l'intersection de tous les ensembles $A_i \times B_i$, il faut donc que l'élément x appartienne simultanément à tous les ensembles A_i , et l'élément y à tous les ensembles B_i . Dans ce cas, (x, y) est aussi un élément de l'ensemble de droite, et réciproquement (leur description est rigoureusement la même).
3. Non, c'est complètement faux avec une union. Un exemple particulièrement caricatural avec seulement deux valeurs de l'indice i . On pose $A_1 = \emptyset$ et $A_2 = \mathbb{R}$, et symétriquement $B_1 = \mathbb{R}$ et $B_2 = \emptyset$. Les deux ensembles $A_1 \times B_1$ et $A_2 \times B_2$ sont vides (le produit de l'ensemble vide avec n'importe quel autre ensemble est nécessairement vide), donc $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \emptyset$. Pourtant, $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est loin d'être un ensemble vide.

Exercice 10 (*)

Commençons par écrire $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ (ensemble à quatre éléments), puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{1\}, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}\}$ (ensemble à seize éléments qui sont presque tous particulièrement atroces).

Exercice 11 (*)

Essayons simplement de visualiser intuitivement ce qu'on fait. L'ensemble E_2 est constitué de tous les entiers de la forme $2n$, avec $k \geq 2$, autrement dit de tous les entiers pairs supérieurs ou égaux à 4. L'ensemble E_3 est de même constitué de tous les multiples de 3 à partir de 6, l'ensemble E_4 de tous les multiples de 4 à partir de 8 et ainsi de suite. L'ensemble F est donc obtenu en supprimant de l'ensemble des entiers naturels tous les multiples de 2 autres que 2 lui-même, tous les multiples de 3 autres que 3, tous les multiples de 4 autres que 4 (bon, ça n'enlève strictement rien puisque tous ces nombres sont pairs et ont donc déjà été supprimés), etc. Il ne reste donc à la fin que les entiers 0, 1, 2, 3, pas 4 qui est multiple de 2, 5, pas 6 qui est multiple de 3, 7, ... Bref, il restera exactement les nombres premiers, 0 et 1. C'est même le principe de construction de l'ensemble des nombres premiers décrit par Eratosthène il y a quelques millénaires, et connu sous le nom de crible d'Eratosthène.

Exercice 12 (**)

1. Un élément de $\mathcal{P}(E)$ est un sous-ensemble de l'ensemble E , et donc a fortiori un sous-ensemble de $E \cup F$. De même, tout élément appartenant à $\mathcal{P}(F)$ appartient aussi à $\mathcal{P}(E \cup F)$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

L'inclusion réciproque est complètement fautive, comme le prouve cet exemple simple : si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{3, 4\}$, $E \cup F = \{1, 2, 3, 4\}$. Le sous-ensemble $G = \{1, 3\}$ appartient certainement à $\mathcal{P}(E \cup F)$, mais ni à $\mathcal{P}(E)$, ni à $\mathcal{P}(F)$, donc pas non plus à leur union.

2. Un élément de $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ est un ensemble qui est à la fois un sous-ensemble de E et un sous-ensemble de F . Autrement dit, il s'agit d'un ensemble G vérifiant $G \subset E$ et $G \subset F$. Dans ce cas, on a également $G \subset E \cap F$, ce qui prouve que $G \in \mathcal{P}(E \cap F)$. Cette fois, la réciproque est aussi vraie : si $G \subset E \cap F$, alors $G \subset E$ et $G \subset F$, donc on a en fait $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

3. Soit $G \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, on peut écrire $G = H \times I$, avec $H \subset E$ et $I \subset F$. En particulier, tout élément de G est de la forme (x, y) , avec $x \in H$ et $y \in I$, donc a fortiori $x \in E$ et $y \in F$. L'ensemble G est donc uniquement constitué d'éléments appartenant à $E \times F$, il appartient à $\mathcal{P}(E \times F)$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \times F)$.

Comme dans le cas de l'union, la réciproque est fausse, et on peut prendre les mêmes ensembles E et F pour le contre-exemple : l'ensemble $G = \{(1, 3); (2, 4)\}$ appartient à $\mathcal{P}(E \times F)$ (il est constitué de deux éléments appartenant tous les deux à $E \times F$), mais pas à $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$. En effet, si on voulait écrire $G = H \times I$ avec $H \subset E$ et $I \subset F$, on devrait avoir $1 \in H$ (puisque $(1, 3) \in G$), $2 \in H$ (car $(2, 4) \in G$), et pour les mêmes raisons $3 \in I$ et $4 \in I$. Mais on aurait alors $G = H \times I = E \times F$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 13 (***)

On va procéder par analyse et synthèse. La façon la plus rapide d'obtenir énormément d'informations sur f ici est de poser $y = f(x)$ (c'est un réel comme un autre, il doit vérifier la propriété) pour simplifier le membre de gauche. On obtient, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2 - x - f(x)$, soit $f(x) = 2 - x - f(0)$. Or, $f(0)$ est une constante réelle, donc on a déjà prouvé que f est nécessairement une fonction affine dont l'expression est de la forme $f(x) = a - x$. Effectuons désormais la synthèse : en supposant que $f(x) = a - x$, avec $a \in \mathbb{R}$, on aura $f(y - f(x)) = f(y - a + x) = a - (y - a + x) = 2a - y - x$. Or, on veut que cette expression soit toujours égale à $2 - x - y$, ce qui ne sera le cas que si $a = 1$. Autrement dit, la seule fonction vérifiant les conditions de l'énoncé est la fonction affine $f : x \mapsto 1 - x$.

Exercice 14 (**)

Là encore, il va falloir procéder par analyse et synthèse, mais surtout exploiter le fait que l'énoncé nous a donné la réponse ! On doit obtenir des fonctions dont l'expression est de la forme $f(x) = ax + b$. Supposons donc que $f(x) = ax + b$, alors l'ordonnée à l'origine b est nécessairement égale à $f(0)$, et le coefficient directeur a peut être obtenu en calculant $f(1) = a + b$, donc $a = f(1) - b = f(1) - f(0)$.

Soit donc une fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé, et posons $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$ (sans supposer que f est affine!), et appliquons la condition de l'énoncé à $y = 0$ et $z = 1$: $\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$, soit $\frac{f(x) - b}{x} = \frac{f(x) - a - b}{x - 1}$. Cette égalité est bien sûr valable pour tous les réels x différents de 0 et de 1, et peut se mettre sous la forme $(f(x) - b)(x - 1) = x(f(x) - a - b)$, soit $xf(x) - bx - f(x) + b = xf(x) - ax - bx$. Deux jolies simplifications plus tard, on trouve $f(x) = ax + b$. Cette égalité restant vraie pour $x = 0$ et $x = 1$, la fonction f est bien une fonction affine.

Réciproquement, vérifions quand même que les fonctions affines sont bien solutions du problème posé : si $f(x) = ax + b$, alors $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{ay + b - ax - b}{y - x} = a$, ce qui est indépendant des valeurs choisies pour x et y , et donc égal à $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$.

Exercice 15 (***)

1. Le seul cas où $P \uparrow Q$ est fausse est celui où $P \wedge Q$ est vraie, c'est-à-dire quand P et Q sont vraies toutes les deux :

P	Q	$P \uparrow Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

2. Le plus simple ici est de faire une table de vérité pour chacune des deux propositions pour pouvoir les comparer, en se rappelant que le « non et » est faux seulement quand ses deux composants sont vrais.

P	Q	R	$P \uparrow Q$	$(P \uparrow Q) \uparrow R$	$Q \uparrow R$	$P \uparrow (Q \uparrow R)$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V

Les deux colonnes qui nous intéressent ne sont pas du tout identiques, le connecteur $\uparrow$ n'est donc pas « associatif ».

3. Il suffit en fait de constater que $P = P \wedge P$, donc $\neg P = \neg(P \wedge P) = P \uparrow P$.
4. Commençons par le plus simple : par définition $P \wedge Q = \neg(P \uparrow Q)$, donc en exploitant la question précédente $P \wedge Q = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$ (les courageux vérifieront que ça marche à coups de tables de vérité).

Pour le « ou », on a intérêt à utiliser les lois de Morgan : $P \vee Q = \neg((\neg P) \wedge (\neg Q)) = \neg((P \uparrow P) \wedge (Q \uparrow Q)) = \neg(((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))) = (((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow (((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)))$. C'est complètement atroce mais ça répond à la question. On peut en fait trouver une expression plus simple si on le souhaite vraiment.

5. L'implication est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse. On peut donc dire qu'elle est équivalente à $\neg(P \wedge (\neg Q))$ (là encore, une table de vérité convaincra les plus dubitatifs). On peut donc écrire $P \Rightarrow Q = \neg((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) = ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q)))$.

Pour l'équivalence, il ne reste plus qu'à faire un « et » avec l'implication réciproque : $P \Leftrightarrow Q = (((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P)))) \uparrow (((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))))$. Là encore, on peut (heureusement) faire beaucoup plus rapide...

Exercice 16 (***)

1. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est ouvert si chaque élément lui appartenant peut être entouré par un intervalle ne contenant que des éléments appartenant à ce sous-ensemble (en topologie, on dit que chaque point de A est **intérieur** à A , autrement dit il n'y a aucun point de A qui soit « au bord » de A).
2. Soit $x \in]0, +\infty[$, par hypothèse $x > 0$, donc $\frac{x}{2} > 0$. En posant $\varepsilon = \frac{x}{2}$, on constate que l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[= \left] \frac{x}{2}, \frac{3x}{2} \right[\subset]0, +\infty[$, ce qui prouve que A est ouvert.

3. Commençons par constater que $\overline{B} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, et choisissons un élément x appartenant à ce complémentaire. On doit alors distinguer deux cas : si $x < 0$, on pose $\varepsilon = -\frac{x}{2}$ (qui est bien un réel strictement positif), et on constate similairement à la question précédente que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[=]\frac{3x}{2}, \frac{x}{2}[\subset]-\infty, 0[\subset \overline{B}$. Deuxième possibilité, on peut avoir $x > 1$. On pose cette fois $\varepsilon = \frac{x-1}{2}$ (qui est à nouveau un réel strictement positif) pour avoir $x - \varepsilon = \frac{x+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, ce qui permet d'obtenir $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]1, +\infty[\subset \overline{B}$. On a bien prouvé que $\overline{B}$ était ouvert, et donc que B est un ensemble fermé.
4. On peut par exemple prendre $C = [0, 1[$. L'ensemble C ne peut pas être ouvert car $0 \in C$, et quel que soit le choix d'un réel $\varepsilon > 0$, on n'aura jamais $] - \varepsilon, \varepsilon[\subset [0, 1[$ puisque l'intervalle de gauche contiendra toujours des valeurs strictement négatives (constatation qui traduit simplement le fait que 0 est « au bord » de l'intervalle $[0, 1[$). Mais de même, $\overline{C} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ ne peut pas être ouvert car aucun intervalle de la forme $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ ne peut être inclus dans $\overline{C}$.

Deux exemples particulièrement stupides d'ensembles à la fois ouverts et fermés : $\mathbb{R}$ tout entier et $\emptyset$ (qui sont complémentaires l'un de l'autre et tous les deux ouverts de façon assez évidente). Ce sont en fait les deux seuls exemples (c'est lié à une propriété de $\mathbb{R}$ appelée connexité, qui signifie en gros que $\mathbb{R}$ est constitué d'un seul morceau).

5. Supposons donc que A et B soient tous les deux ouverts, et considérons $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, par hypothèse, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A \subset A \cup B$, et s'il appartient à B c'est pareil. L'ensemble $A \cup B$ est donc ouvert. Pour l'intersection c'est un tout petit peu plus compliqué : si $x \in A \cap B$, il existe **deux** réels (qui n'ont aucune raison d'être égaux) $\varepsilon_A > 0$ et $\varepsilon_B > 0$ tels que $]x - \varepsilon_A, x + \varepsilon_A[\subset A$ et $]x - \varepsilon_B, x + \varepsilon_B[\subset B$. On note alors tout bêtement ε le plus petit de ces deux réels (qui reste bien sûr strictement positif), et on a certainement $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$ (soit c'est le même intervalle qu'avant, soit il est plus petit), et $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset B$, donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A \cap B$, ce qui prouve que $A \cap B$ est ouvert.

Si C et D sont deux fermés, on peut poser $A = \overline{C}$ et $B = \overline{D}$, et affirmer que ces deux sous-ensembles sont ouverts. Les démonstrations précédentes prouvent alors que $A \cup B$ et $A \cap B$ sont toujours ouverts, mais les lois de Morgan affirment que $\overline{C \cup D} = A \cap B$, et $\overline{C \cap D} = A \cup B$, ce qui prouve donc que $C \cup D$ et $C \cap D$ sont fermés (puisque leurs complémentaires sont ouverts).

6. C'est exactement la même démonstration que ci-dessus. Si A_i est ouvert quel que soit l'indice $i \in I$, et $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $\exists i \in I$, $x \in A_i$, puis $\exists \varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, donc l'union est bien ouverte. Symétriquement, une intersection quelconque de fermés est donc fermée.
7. On peut par exemple poser $A_n =]0, 1 + \frac{1}{n}[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Chacun de ces ensembles est ouvert (tout intervalle ouvert est ouvert), et leur intersection est égale à $]0, 1[$ qui n'est pas ouvert.
8. Non, $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert, aucun élément de $\mathbb{Q}$ ne peut être placé dans un intervalle ne contenant que des rationnels puisqu'aucun intervalle de $\mathbb{R}$ ne contient que des rationnels. Mais symétriquement, tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient des rationnels, donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas non plus ouvert, ce qui prouve que $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 17 (**)

1. Un ensemble 1-syndétique vérifie la définition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{n\} \neq \emptyset$. L'ensemble $\{n\}$ ne contenant qu'un élément, cela revient exactement à dire que $n \in A$ pour tout entier n . Autrement dit, on a nécessairement $A = \mathbb{N}$. Réciproquement, $A = \mathbb{N}$ est 1-syndétique de façon évidente.

2. Pour tout entier naturel n , $\{n, n+1, \dots, n+k-1\} \subset \{n, n+1, \dots, n+k\}$, donc, quel que soit l'ensemble A , $A \cap \{n, n+1, \dots, n+k-1\} \subset A \cap \{n, n+1, \dots, n+k\}$. Si l'ensemble de gauche est non vide, celui de droite le sera donc également, ce qui prouve que A k -syndétique implique A $k+1$ -syndétique.
3. L'exemple le plus évident est $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble n'est pas 2-syndétique puisqu'il a par exemple une intersection vide avec $\{1, 2\}$, qui est de la forme $\{1, 1+2-1\}$ pour $n = 1$. Par contre, tout ensemble de la forme $\{n, n+1, n+2\}$ contient (exactement un multiple de 3 (donc a une intersection non vide avec A). En effet, soit n est lui-même multiple de 3, soit il est congru à 1 modulo 3, et $n+2$ est multiple de 3, soit il est congru à 2 modulo 3 et $n+1$ est multiple de 3.

Exactement de la même façon, on démontre que l'ensemble des multiples de $k+1$ est un ensemble $(k+1)$ -syndétique (en notant p la congruence de n modulo $k+1$, $n+(k+1-p)$ sera toujours un multiple de $k+1$), mais pas un ensemble k -syndétique puisqu'il ne contient aucun élément de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$.

4. Les entiers pairs forment d'après la question précédente un exemple d'ensemble 2-syndétique mais pas 1-syndétique. Il est bien sûr aussi k -syndétique pour tout entier $k \geq 2$ (d'après la question 2).
5. Non, A_2 n'est pas syndétique : entre deux éléments consécutifs de l'ensemble A_2 , donc des entiers de la forme n^2 et $(n+1)^2$, il existe exactement $2n$ entiers consécutifs n'appartenant pas à A_2 (puisque $(2n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, tous les nombres de la forme $n^2 + k$ avec $k \in \{1, \dots, 2n\}$ ne sont pas dans A_2). L'ensemble A_2 ne peut donc pas être $2n$ -syndétique, quelle que soit la valeur de l'entier n . Il n'est donc pas du tout syndétique.
6. Le principe est le même qu'à la question précédente, il faut en fait prouver que l'écart entre deux nombres entiers consécutifs n'est pas majoré. C'est en fait assez facile : pour un entier $n \geq 2$ quelconque, on considère les entiers consécutifs $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$. Aucun de ces entiers n'est premier : $n! + 2$ est divisible par 2 (puisque $n!$ est divisible par 2), $n! + 3$ est divisible par 3, et ainsi de suite jusqu'à $n! + n$ qui est divisible par n . L'ensemble A_3 ne peut donc pas être $n-1$ -syndétique, et comme c'est vrai pour tous les entiers, il n'est pas syndétique. On a donc prouvé en quelque sorte que « l'écart maximal entre deux nombres premiers consécutifs est infini ». Rappelons en passant que l'écart minimal entre deux nombres premiers est évidemment 1 (atteint uniquement pour 2 et 3), mais qu'on ne sait toujours pas s'il existe une infinité de paires de nombres premiers jumeaux (différence 2). Les plus grands nombres premiers jumeaux connus à l'heure actuelle ont quelques centaines de milliers de chiffres...
7. C'est très simple à construire de façon intuitive : on prend les entiers naturels « dans l'ordre » et on en met un dans A , puis un dans $\overline{A}$, puis deux dans A , deux dans $\overline{A}$, trois dans A , trois dans $\overline{A}$ etc. Si on veut une formulation concrète (légèrement différente de la construction décrite juste avant), on peut par exemple prendre $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n^2 + k \mid k \in \mathbb{K}, \mathbb{K}, \dots, \mathbb{K}\}$. Entre n^2 et $n^2 + n$ on aura toujours $n+1$ entiers consécutifs appartenant à A , et entre $n^2 + n$ et $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, on aura n entiers appartenant à $\overline{A}$, ce qui prouve qu'aucun des deux ne peut être syndétique.

Problème (***)

1. Prouvons l'égalité des deux ensembles par double inclusion. Supposons d'abord que $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Par hypothèse, soit $x \in A$, soit $x \in B$, et dans les deux cas $x \in A \cup B$. Par contre, x ne peut pas appartenir à la fois à A et B sinon il ne serait ni dans $A \setminus B$ (puisqu'il appartiendrait à B) ni dans $B \setminus A$ (symétriquement il appartiendrait à A). Donc $x \notin A \cap B$, et on a bien prouvé que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dans l'autre sens, supposons maintenant que

$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Puisque $x \in A \cup B$, on a soit $x \in A$, soit $x \in B$. Si $x \in A$, alors $x \notin B$ puisque $x \notin A \cap B$, et donc $x \in A \setminus B$. De même, si $x \in B$, alors $x \in B \setminus A$. Dans les deux cas, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, et les deux ensembles sont donc bien égaux.

Pour ceux qui préfèrent travailler directement sur les propriétés des opérations élémentaires sur les ensembles : $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (on a utilisé en cours de route les lois de Morgan et la distributivité de l'intersection par rapport à l'union).

2. C'est particulièrement pénible à faire à la main, mais on va essayer de décrire explicitement les éléments de ces ensembles en utilisant le résultat de la question précédente. Supposons pour commencer que $x \in (A \Delta B) \Delta C$. On a donc $x \in (A \Delta B) \cup C$, mais $x \notin (A \Delta B) \cap C$. Première possibilité : $x \in A \Delta B$ et $x \notin C$. Dans ce cas, on a soit $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$, soit $x \in B$, $x \notin A$ et $x \notin C$. Bref, x appartient à exactement un ensemble parmi A , B et C (mais pas à C). Deuxième possibilité : $x \in C$ et $x \notin A \Delta B$. Là encore il y a deux choix possibles : $x \notin A \cup B$, auquel cas x appartient à l'unique ensemble C (le cas qui nous manquait tout à l'heure) ; soit $x \in A \cup B$, mais $x \in A \cap B$ pour ne pas être dans $A \Delta B$, ce qui revient à dire que $x \in A \cap B \cap C$. Si on résume on a prouvé que $(A \Delta B) \Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap C)$. Si on échange le rôle des ensembles A , B et C , cette dernière expression reste exactement la même, ce qui prouve que $A \Delta (B \Delta C)$ est le même ensemble.

Autre possibilité pour avoir moins à réfléchir : une bonne vieille table de vérité fonctionne très bien.

3. Allons-y pour une démonstration à coup d'ensembles : $A \cap (B \Delta C) = A \cap (B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$ (les deux autres ensembles de l'union étant vides). De l'autre côté, $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = (A \cap B \cap (\overline{A \cap C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A \cap B}))$, ce qui est bien la même chose puisqu'on peut supprimer les $\overline{A}$ dont l'intersection avec A sera évidemment vide.
4. Parmi les multitudes d'exemples possibles : $A \cup (\emptyset \Delta A) = A \cup A = A$, mais $(A \cup \emptyset) \Delta (A \cup A) = A \Delta A = \emptyset$, les deux ensembles sont différents dès que A est non vide.
5. Pour que $A \Delta B$ soit vide, il faut que $A \cap B = A \cup B$, ce qui ne peut être le cas que si $B = A$ (sinon, en reprenant l'autre définition, on doit avoir $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$, soit $A \subset B$ et $B \subset A$, et on conclut de même).
6. Cette fois, on doit avoir $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, ce qui impose $B = \overline{A}$ (les éléments de B ne peuvent pas appartenir à A car l'intersection est vide, et tout élément qui n'est pas dans A doit être dans B pour avoir une union égale à E).
7. Supposons donc $X \subset E$ fixé, et cherchons à construire un ensemble B tel que $A \Delta B = X$ (donc un antécédent de X par notre application). Soit $x \in X$. L'élément x doit appartenir à $A \Delta B$. S'il appartient à A , il ne doit donc pas être dans B , et vice versa. Autrement dit, B doit contenir l'ensemble $X \setminus A$, mais aucun autre élément de X . Prenons maintenant un élément y n'appartenant **pas** à X , cette fois y ne doit pas être dans $A \Delta B$. S'il est dans A , il doit donc être aussi dans B , mais s'il n'est pas dans A , il ne doit pas être dans B non plus. Autrement dit, B doit contenir $A \setminus X$, mais aucun autre élément de $\overline{X}$. Il n'y a donc qu'une possibilité : $B = (A \setminus X) \cup (X \setminus A)$, c'est-à-dire tout bêtement $B = A \Delta X$. Cet antécédent étant unique, l'application est bien bijective. Plus fort que ça, l'antécédent calculé n'est autre que l'image de X par notre application, ce qui prouve que cette dernière est sa propre réciproque.

C'est d'ailleurs une façon honteuse de résoudre cette question sans se fatiguer : en notant f l'application, on écrit $f \circ f(B) = A \Delta (A \Delta B) = (A \Delta A) \Delta B = \emptyset \Delta B = B$, ce qui prouve que $f \circ f = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$, et donc d'un seul coup que f est bijective et que $f^{-1} = f$.