Feuille d'exercices n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

19 septembre 2025

Exercice 1 (*)

1. Il faut résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$. Le trinome correspondant a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{3+5}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Le trinome étant positif en-dehors des racines, $\mathcal{D}_f = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty[$.
2. L'exponentielle est là pour faire joli, ce qui est important c'est d'avoir $x + 5 > 0$, soit $x > -5$, donc $\mathcal{D}_f =]-5, +\infty[$.
3. Le dénominateur interdit les valeurs -2 et 2. Reste à vérifier quand le numérateur est positif. C'est le cas en-dehors de ses racines 0 et -1, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 0] \cup [1, 2[\cup]2, +\infty[$.
4. Il faut déterminer quand $x^5 + 1 > 0$, autrement dit quand $x^5 > -1$. Or, on sait que $x \mapsto x^5$ est une fonction strictement croissante, et que $(-1)^5 = -1$, donc $x^5 > -1 \Leftrightarrow x > -1$ et $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

1. La fonction f est paire (elle est somme de fonctions puissances paires).
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire puisque $\forall x \neq 0$, $f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$.
3. Cette fonction très laide est paire : elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ (ce qui est sous la racine est toujours strictement positif, par contre les trois valeurs enlevées annulent le premier dénominateur) et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \dfrac{1}{((-x)^3 - 2 \times (-x))^2} \times \dfrac{(-x)^4}{\sqrt{(-x)^2 + 2}} = \dfrac{1}{(2x - x^3)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2+2}} = f(x)$ car $(2x - x^3)^2 = (x^3 - 2x)^2$ (prendre la carré d'un nombre ou de son opposé donne toujours le même résultat).
4. Cette fonction est définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, et elle est paire : $f(-x) = |2(-x)^2 - e^{(-x)^4} + \ln((-x)^2 - 1)| = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)| = f(x)$.
5. Cette dernière fonction est définie sur $]-1, 1[$, et elle est impaire : $f(-x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ (on a simplement utilisé le fait que $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$).

Exercice 3 (** à ***)

1. En posant $X = x^2$, on se ramène à l'équation $X^2 + X - 20 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 80 = 81$, donc admet deux racines $X_1 = \dfrac{-1+9}{2} = 4$ et $X_2 = \dfrac{-1-9}{2} = -5$. La valeur -5 est à éliminer pour x^2, donc on a nécessairement $x^2 = 4$, d'où $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$.

2. Cette équation du troisième degré admet -1 comme racine évidente : $(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2 \times (-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche sous la forme $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 1$; $a + b = -5$, donc $b = -6$; $b + c = 2$ donc $c = 8$, ce qui est cohérent avec la dernière condition. Notre équation est vérifiée si $x = -1$ ou $x^2 - 6x + 8 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 36 - 32 = 4$, et de racines $x_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4$. Conclusion : $\mathcal{S} = -1, 2, 4$.
3. L'inéquation est définie lorsque $x + 2$ et $3x - 6$ sont tous deux strictement positifs, donc pour $x > 3$. Elle revient alors à $\ln \dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant \ln 2$, soit $\dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant 2$, donc $\dfrac{-3x+14}{2x-6} \leqslant 0$. Comme $2x - 6$ a déja été supposé positif, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{14}{3}; +\infty\right[$.
4. En faisant tout passer à gauche, on se ramène à $\dfrac{-5x-11}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geqslant 0$. Le signe du numérateur est facile à obtenir, mais pour le dénominateur il faut commencer par le factoriser. On constate que -1 est racine du dénominateur : $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$. On peut donc écrire $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Par identification des coefficients, on a $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$, donc $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6)$. Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. On peut désormais faire un gros tableau de signes :

x		-3		$-\frac{11}{5}$		-1		2	
$-5x-11$	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$
x^3+2x^2-5x-6	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$
Q	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left]-3, -\dfrac{11}{5}\right] \cup]-1, 2[$.
5. Commençons par constater que l'inéquation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant -2$. Lorsque $x \in [-2, 1]$, l'inéquation sera certainement vérifiée puisque le membre de gauche est alors négatif, et le membre de droite positif. Reste le cas $x > 1$, où on peut se permettre de tout élever au carré puisque les deux membres de l'inégalité sont alors positifs : on obtient $x^2 - 2x + 1 \leqslant x + 2$, soit $x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 9 + 4 = 13$, et s'annule donc en deux valeurs $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$. Le trinome est négatif entre ses racines, donc sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. Comme $x_1 < 1$ et $x_2 > 1$, on en déduit concernant notre inéquation initiale que $\mathcal{S} = \left[-2, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.
6. Commençons par remarquer que l'équation n'est définie que sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Avant de passer à l'exponentielle, il est indispensable de regrouper les deux ln de gauche pour n'avoir qu'un seul ln de chaque côté, ce qui donne $\ln(x^2 + 2x - 3) = \ln 4$, donc $x^2 + 2x - 7 = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 28 = 32$, et admet donc deux racines $x_1 + \dfrac{-2 + 4\sqrt{2}}{2} = -1 + 2\sqrt{2}$, et $x_2 = -2 - 2\sqrt{2}$. La deuxième solution n'appartient pas à l'intervalle de définition, donc $\mathcal{S} = \{2\sqrt{2} - 1\}$.
7. Tout étant positif, on peut passer au ln : $3 \times 2^{3x-4} \geqslant 2^4 \Leftrightarrow \ln 3 + (3x - 4)\ln 2 \geqslant 4 \ln 2$, soit $(3x - 8)\ln 2 \geqslant -\ln 3$, donc $x \geqslant \dfrac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}$, donc $\mathcal{S} = \left[\dfrac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}, +\infty\right[$.

8. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si $2x - 3 > 0$, soit $x > \frac{3}{2}$. Ensuite c'est très simple : puisque la fonction ln est strictement croissante, $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5 \Leftrightarrow 2x-3 \leqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, donc $\mathcal{S} = \left]\frac{3}{2}, 4\right[$.
9. En faisant passer quelques termes à droite, on obtient $2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5-1) = 4 \times 5^x$, soit en prenant le ln des deux côtés $(3x-1)\ln 2 = \ln 4 + x \ln 5$, donc $x(3\ln 2 - \ln 5) = 3\ln 2$, et $x = \frac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}\right\}$.
10. Cette équation n'a de sens que si $x > 0$ (on peut éventuellement extrapoler que 0 va aussi être solution de l'équation, si on arrive à donner un sens à 0^0). En prenant les ln, on obtient alors $\sqrt{x}\ln x = x\ln(\sqrt{x}) = x\frac{\ln x}{2}$, donc $\ln x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 0$. On en déduit que soit $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$, soit $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$, auquel cas on obtient en élevant au carré (on peut, tout est positif) $x = \frac{x^2}{4}$, soit $x(x-4) = 0$, donc $x = 4$ (0 ayant été exclu dès le départ). Conclusion : $\mathcal{S} = \{1, 4\}$.
11. Celle-ci est un piège assez vicieux. On ne sait pas vraiment résoudre ce genre d'équation, mais on peut constater que $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$ est une fonction strictement croissante sur son domaine de définition $]0, +\infty[$, et qu'elle prend pour valeur 0 en 1. Elle ne peut donc pas s'annuler plus d'une fois et $\mathcal{S} = \{1\}$.
12. Ca doit presque être un réflexe pour ce genre d'équations : on pose $X = e^{-2x}$ et on obtient $X^3 + 3X^2 - X - 3 = 0$. On constate (comme d'habitude) que 1 est racine évidente de l'équation, et on peut donc écrire $(X^3 + 3X^2 - X - 3) = (X-1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$, soit après identification $a = 1$; $b = 4$ et $c = 3$. Reste à résoudre $X^2 + 4X + 3 = 0$, équation ayant pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines réelles $X_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$. Ces deux dernières valeurs n'étant pas très compatibles avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est $e^{-2x} = 1$, ce qui donne $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
13. Posons $X = 8^{3x}$, on cherche alors à résoudre $X^2 - 3X - 4 \leqslant 0$, inéquation ayant pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, soit deux racines réelles $X_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{3+5}{2} = 4$. On doit donc avoir $-1 \leqslant 8^{3x} \leqslant 4$. La première inégalité est toujours vérifiée, puisque la puissance est nécessairement positive. Quant à la deuxième, elle devient, en passant au ln, $3x\ln 8 \leqslant \ln 4$, soit $x \leqslant \frac{\ln 8}{3\ln 4}$. Comme $\frac{\ln 4}{3\ln 8} = \frac{2\ln 2}{9\ln 2} = \frac{2}{9}$, on a donc $\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{2}{9}\right]$.
14. La deuxième équation du système peut se traduire par $\log(xy) = 4$, soit, en passant à l'exponentielle de base 10, $xy = 10^4 = 10\ 000$. Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $x^2 - 520x + 10\ 000 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 520^2 - 40\ 000 = 230\ 400$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{520-480}{2} = 20$ et $x_2 = \frac{520+480}{2} = 500$ (notez qu'on peut facilement vérifier que ces deux nombres sont solutions du problème posé). On a donc $\mathcal{S} = \{(20, 500), (500, 20)\}$.
15. On se contente de tout écrire à l'aide des exponentielles. Quitte à tout multiplier par 2, cela donne $4(e^x + e^{-x}) + 3(e^x - e^{-x}) - 8 = 0$, soit $7e^x - 8 + e^{-x} = 0$. En posant $X = e^x$ (et en multipliant tout par e^x, on se ramène à l'équation du second degré $7X^2 - 8X + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 64 - 28 = 36$, et ses solutions sont $X_1 = \frac{8+6}{14} = 1$ et $X_2 = \frac{8-6}{14} = \frac{1}{7}$. On trouve donc deux solutions à l'équation initiale : $x = \ln(1) = 0$, et $x = -\ln(7)$.
16. Les valeurs $x = -1$ et $x = -\frac{1}{2}$ sont interdites pour cette équation (puisqu'elles annulent ce qui se trouve à l'intérieur d'un ln). Le reste du temps, on peut écrire le membre de droite comme

un ln de quotient et tout composer par l'exponentielle pour obtenir l'inéquation équivalente $\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant 2$. Cette inéquation est équivalente à l'encadrement $-2 \leqslant \frac{x+1}{2x+1} \leqslant 2$. L'inéquation de gauche de cet encadrement peut se réécrire sous la forme $\frac{5x+3}{2x+1} \geqslant 0$, elle est vérifiée sur $\left]-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. L'inégalité de droite peut se mettre sous la forme $\frac{3x+1}{2x+1} \geqslant 0$, elle est vérifiée sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$. Finalement, $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$, ensemble auquel il faut encore enlever la valeur 1.

17. Commençons par constater que $X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. Quitte à tout diviser par x^2 (de toute façon, 0 n'est pas solution de notre équation), l'équation initiale est équivalente à $x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} = 0$, soit $x^2+2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3 = 0$. On effectue notre changement de variables : $X^2+2X-3 = 0$. Cette équation a pour solution évidente $X_1 = 1$ et pour deuxième solution $X_2 = -3$ (on peut bien sûr calculer un discriminant pour les obtenir). Reste à retrouver les valeurs correspondantes de x à chaque fois : $X = 1 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2-x+1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$ et admet pour solutions complexes $x_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. De même, $X = -3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5$, admettant deux solutions réelles $x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_4 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. On a bien entendu $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

18. On peut tout réécrire à l'aide de l'unique fonction ln : $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(x)}{\ln(4)} + \frac{\ln(x)}{\ln(8)} = \frac{11}{2}$. Comme $\ln(4) = 2\ln(2)$ et $\ln(8) = 3\ln(2)$, on trouve en fait $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2}$, soit $\frac{11\ln(x)}{6\ln(2)} = \frac{11}{2}$. Finalement, $\ln(x) = 3\ln(2)$, donc $x = e^{3\ln(2)} = 2^3 = 8$. Il n'y a qu'une solution à l'équation : $\mathcal{S} = \{8\}$.

19. Réécrivons le système à coup d'exponentielles, en multipliant tout par 2 pour simplifier : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} e^x & + & e^{-x} & + & e^y & + & e^{-y} & = & 8 \\ e^x & - & e^{-x} & + & e^y & - & e^{-y} & = & 2 \end{array}\right.$. En additionnant les deux équations (et en simplifiant par 2), on a donc $e^x + e^y = 5$. De même, en soustrayant, $e^{-x} + e^{-y} = 3$. Posons maintenant $X = e^x$ et $Y = e^y$, les équations deviennent $X + Y = 5$ et $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = 3$, soit $\frac{X+Y}{XY} = 3$, ce qui implique $XY = \frac{5}{3}$ en exploitant la première équation. Autrement dit, $Y = \frac{5}{3X}$, donc $X + \frac{5}{3X} = 5$, puis $X^2 - 5X + \frac{5}{3} = 0$. Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation du second degré, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - \frac{20}{3} = \frac{55}{3}$, et pour solutions $X_1 = \frac{10 - \sqrt{\frac{55}{3}}}{2} = \frac{1}{6}(15-\sqrt{165})$, et $X_2 = \frac{1}{6}(15+\sqrt{165})$. On constate que $X = X_1 \Rightarrow Y = X_2$ et $X = X_2 \Rightarrow Y = X_1$ (ce qui est logique, Y vérifiant la même équation du second degré que X). Les deux nombres obtenus étant strictement positifs, on peut remontrer sans problème le changement de variable : $x = \ln\left(\frac{1}{6}(15 - \sqrt{165})\right)$ et $y = \ln\left(\frac{1}{6}(15 + \sqrt{165})\right)$, ou bien les deux valeurs sont échangées.

Exercice 4 (**)

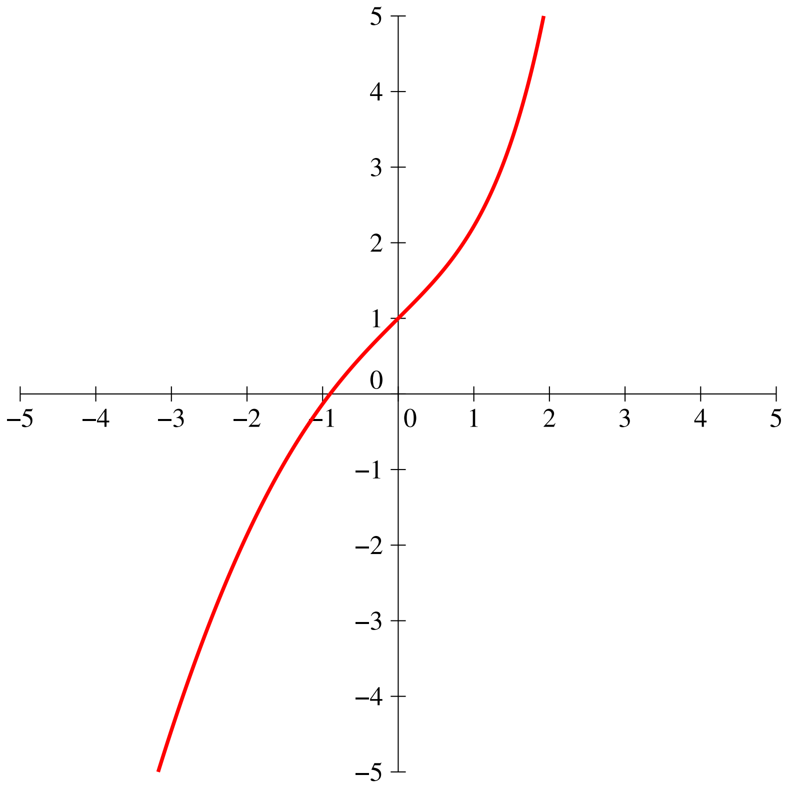
1. La fonction $x \mapsto -2x+3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et l'exponentielle est strictement croissante, donc la composée $x \mapsto e^{-2x+3}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est à valeurs dans $]0,+\infty[$ (une exponentielle est toujours positive), intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante. Conclusion : $x \mapsto \dfrac{1}{e^{-2x+3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme on multiplie ceci par $-\dfrac{5}{2}$, le sens de variation change encore une fois, et f est finalement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soustraire 3 à la fin ne changera pas le sens de variation, concentrons-nous donc sur le carré. La fonction $x \mapsto e^x + 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Cette fois-ci c'est différent, car $e^x - 3$ ne prend pas toujours des valeurs positives. Plus précisément $e^x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \ln 3$. Sur $]-\infty;\ln 3]$, $x \mapsto e^x - 3$ est donc croissante et à valeurs dans $]-\infty,0]$, intervalle sur lequel la fonction carré est décroissante. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty,\ln 3]$. Sur $[\ln 3,+\infty[$, $x \mapsto e^x - 3$ est croissante et à valeurs positives, et cette fois f sera strictement croissante.
4. Commençons par constater que f n'est pas définie partout : $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < 0$. Ensuite, la fonction $x \mapsto -x$ étant strictement décroissante sur $]-\infty,0[$, et les fonctions exponentielle et ln strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déduit facilement que f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$
5. Notre dernière fonction est définie si $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ (un petit tableau de signe pour le vérifier). Pour obtenir son sens de variations, il peut être utile de faire la petite modification suivante : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{x-1+2}{x-1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)$. La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ étant strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$, et le logarithme népérien étant strictement croissant sur son ensemble de définition, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$, ainsi que sur $]1,+\infty[$.

Exercice 5 (* à ***)

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - x$ et de dérivée seconde $f''(x) = e^x - 1$. La fonction f'' s'annule en 0, donc on obtient pour f' le tableau de variations suivant :

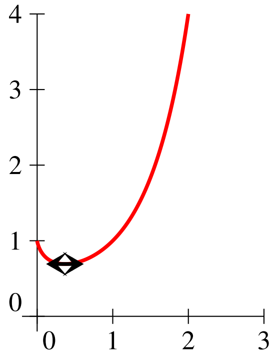
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(les limites ne posent pas de difficulté de calcul). Comme $1 > 0$, f' est toujours strictement positive, et f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites de f se calculent elles aussi assez facilement : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et en $+\infty$, on peut écrire $f(x) = e^x\left(1-\dfrac{x^2}{2e^x}\right)$, où la parenthèse a pour limite 1 par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour tracer à la main une courbe représentative correcte, il faudrait calculer quelques points car on manque cruellement d'informations. On peut toujours constater que $f(0) = 1$. En tout cas, la courbe ressemble à ceci :



2. La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$, et on peut l'écrire sous forme exponentielle $f(x)=e^{x\ln x}$. Elle a donc pour dérivée $f'(x)=(\ln x+1)e^{x\ln x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x=-1$, c'est-à-dire pour $x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$, et f est donc décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$. On peut calculer les limites de f : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ (pas de problème pour celle-là). Après avoir calculé $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}}=e^{-\frac{1}{e}}$, on obtient le tableau de variations et la courbe suivants :

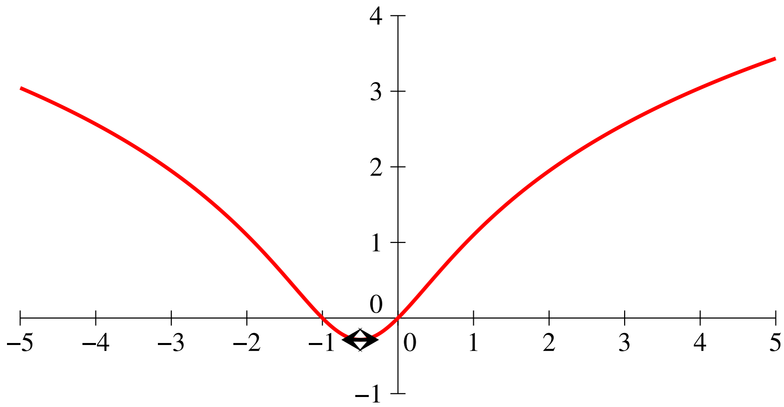
x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



3. Intéressons-nous pour commencer au domaine de définition de f, et cherchons pour cela les racines du trinome $1+x+x^2$. Il a pour discriminant $\Delta=1-4=-3$, donc est toujours

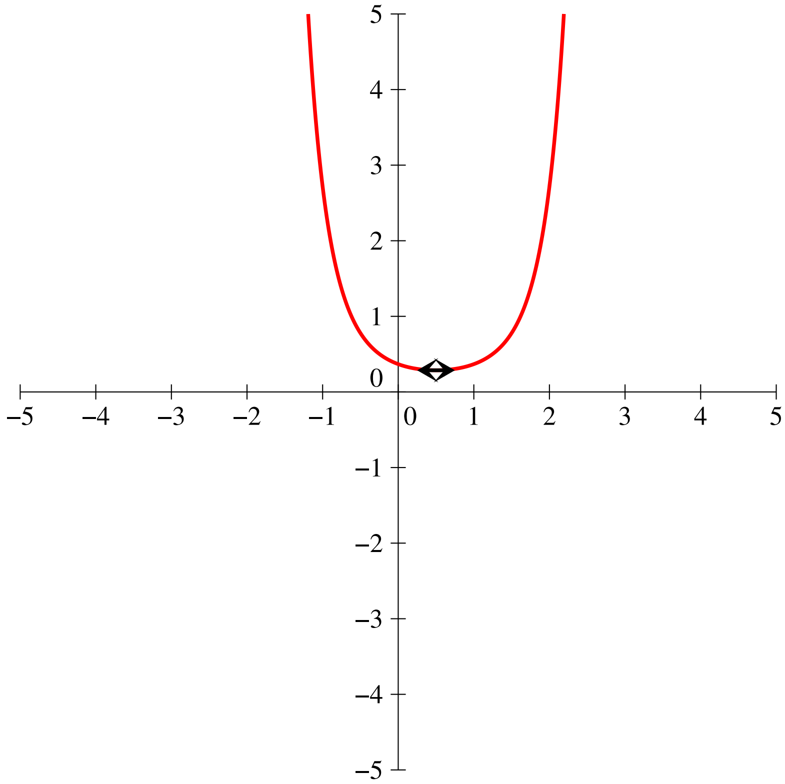
du signe de 1, à savoir positif. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$, qui s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 + x + x^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, et de plus $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$\ln 3 - \ln 4$	$\nearrow$ $+\infty$



4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$, qui s'annule pour $x = \dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 - x - 1 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$ $+\infty$



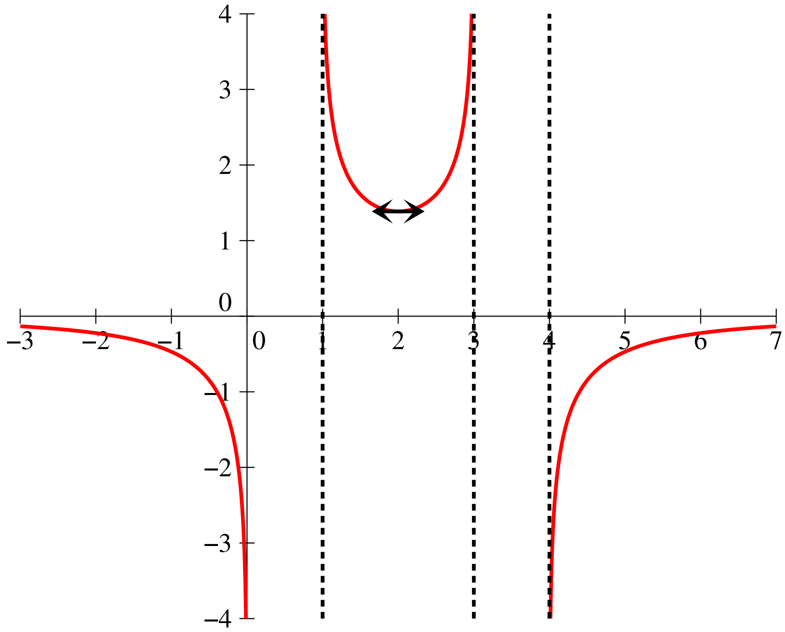
5. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de f, et pour cela faire un joli tableau de signes. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ (pour le numérateur, la factorisation par x rend les racines évidentes). D'où le tableau :

x		0		1		3		4	
$x^2 - 4x$	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$

On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]1, 3[\cup]4, +\infty[$. Sur cet ensemble, f a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2-4x+3) - (2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}$. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathcal{D}_f$ (c'est un produit au lieu d'un quotient, mais le tableau de signes est exactement celui qu'on a fait ci-dessus), f' est du signe de $x - 2$. Par ailleurs, $f(2) = \ln \dfrac{-4}{-1} = 2\ln 2$

Restent quelques limites un peu pénibles à calculer. Les plus faciles sont les limites en 0 et en 4 : quand le numérateur s'annule, le quotient à l'intérieur du ln tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\infty$. En 1 et 3, c'est à peine plus compliqué : le dénominateur s'annule donc le quotient tend vers $+\infty$ (ça ne peut pas être $-\infty$ puisque f ne serait pas définie si le quotient prenait des valeurs négatives), et on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Enfin, vos souvenirs sur le calculs de limites de Terminale devraient vous permettre de vérifier que la limite du quotient en $\pm\infty$ vaut 1 (on factorise par x^2 en haut et en bas), d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Ce qui nous donne un tableau et une courbe ressemblant à ceci :

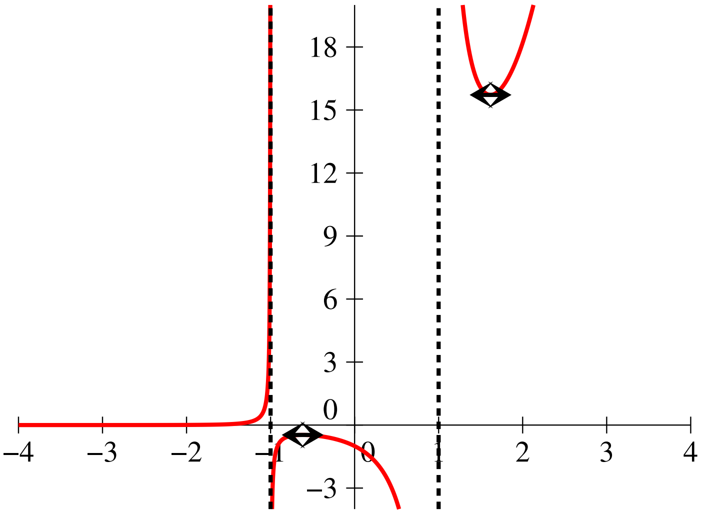
x	$-\infty$		0	1		2		3	4		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ||	|| $+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ ||	|| $-\infty$	$\nearrow$	0



6. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - 2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-x-1)^2}$. Cette dérivée est du signe de x^2-x-1, trinome dont le discriminant vaut $\Delta = 1+4 = 5$, qui s'annule en deux valeurs $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (qui est compris entre -1 et 1) et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (qui est plus grand que 1). La fonction f admet donc un maximum en x_1 et un minimum en x_2, dont on ne cherchera exceptionnellement pas à expliciter les valeurs car ça ne se simplifie vraiment pas. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; et sans croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$. Comme par ailleurs e^{2x} est strictement positif, et x^2-1 est positif en-dehors de ses racines, on trouve $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

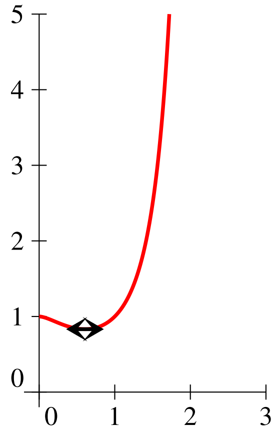
x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe n'est ici pas très pratique à tracer sur une feuille, le minimum étant à une hauteur assez élevée.

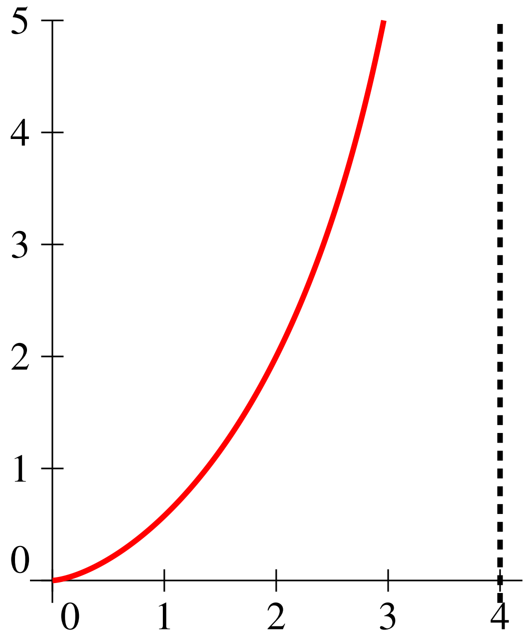


7. Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$, et s'écrit sous forme exponentielle $f(x) = e^{x^2 \ln x}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = (2x \ln x + x)e^{x^2 \ln x} = x(2 \ln x + 1)e^{x^2 \ln x}$. Le facteur x est toujours strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, seul compte donc le signe de $2 \ln x + 1$. Ceci s'annule pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Le calcul des limites est extrêmement similaire à celui de la deuxième fonction de l'exercice, au point d'ailleurs que les limites sont les mêmes, on a $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{1}{2e}}$ et on obtient tableau et courbe :

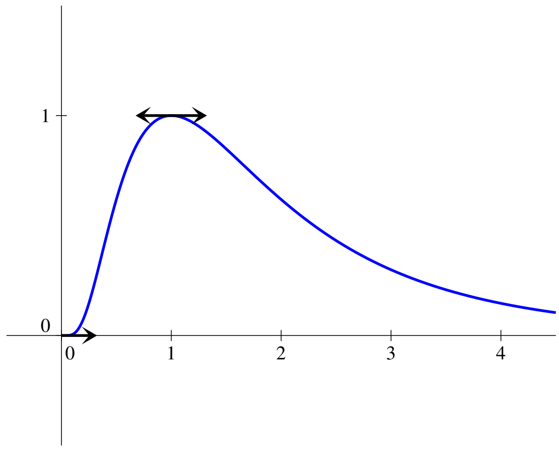
x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



8. La fonction f est définie si $\dfrac{x^3}{2a - x} \geqslant 0$, soit lorsque $x \in [0, 2a[$. La fonction vérifie évidemment $f(0) = 0$, et $\lim\limits_{x \to 2a} f(x) = +\infty$. La fonction racine carrée étant croissante, f a les mêmes variations que $x \mapsto \dfrac{x^3}{2a - x}$, qui a pour dérivée $\dfrac{3x^2(2a - x) + x^3}{(2a - x)^2} = \dfrac{6ax^2 - 2x^3}{(2a - x)^2} = \dfrac{2x^2(3a - x)}{(2a - x)^2}$, toujours positive sur $[0, 2a]$. La fonction f est donc strictement croissante, et on n'a pas grand chose de plus à dire sur cette fonction ! Un exemple de courbe lorsque $a = 2$:



9. Comme pour les autres fonctions de ce genre, on commence par écrire sous forme exponetielle $f(x) = e^{-\ln(x)\ln(x)} = e^{-\ln^2(x)}$, définie sur $]0, +\infty[$ (pour une fois, il s'agit vraiment du domaine de définition naturel de la fonction !). Les limites ne posent aucun problème : $\lim\limits_{x\to 0} \ln^2(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln^2(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'(x) = \left(-\dfrac{2\ln(x)}{x}\right) e^{-\ln^2(x)}$, qui est simplement du signe de $-\ln(x)$. On aura donc un maximum atteint pour $x = 1$, de valeur $f(1) = e^0 = 1$ (il est normal que la fonction ne prenne que des valeurs dans l'intervalle $]0, 1[$, puisque $-\ln^2(x) \leqslant 0$). On peut directement tracer une allure de courbe (on a indiqué la tangente horizontale en 0 sur la courbe, mais le calcul de la limite de la dérivée en 0 est ici loin d'être évident) :



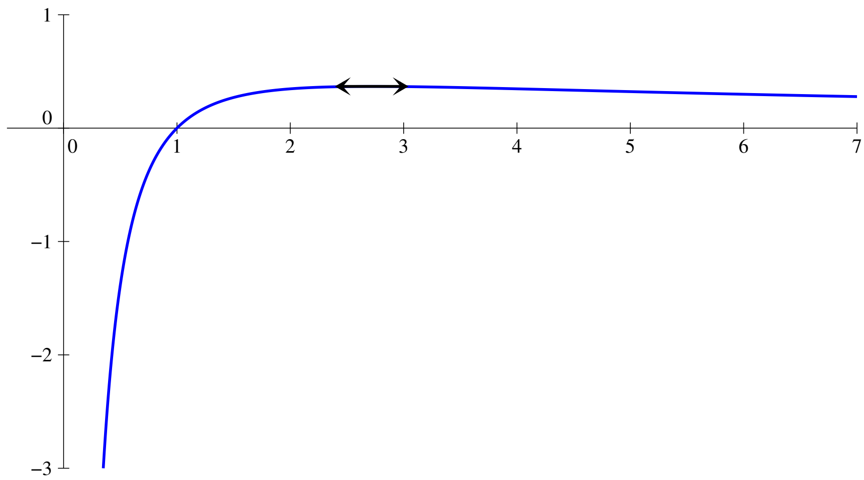
Exercice 6 (**)

1. La fonction f est définie (et de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$, et $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$. La fonction f est donc croissante sur $]0, e]$ puis décroissante sur $[e, +\infty[$, admettant pour maximum $f(e) = \dfrac{1}{e}$. de plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée) et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

(croissance comparée extrêmement classique). On peut ajouter que $f(1) = 0$, et dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Et la petite courbe qui va avec :



2. Il y a forcément un lien avec la question précédente : en effet, $a^b = b^a$ revient à dire que $e^{b\ln(a)} = e^{a\ln(b)}$, donc $b\ln(a) = a\ln(b)$ et $f(a) = f(b)$. Vu les variations obtenues pour la fonction f, les entiers a et b ne peuvent pas être tous les deux supérieurs à e, sinon ils appartiendraient à un intervalle sur lequel f est strictement décroissante donc injective. On a donc nécessairement $a = 2$, et il est ensuite facile de vérifier que $b = 4$ convient, et qu'il est nécessairement le seul à convenir. Seul le couple $(2, 4)$ est donc solution du problème.
3. Même méthode que ci-dessus : $e^\pi < \pi^e \Leftrightarrow \pi\ln(e) < e\ln(\pi) \Leftrightarrow f(e) < f(\pi)$, ce qui est manifestement faux. On en déduit que le plus grand des deux est e^π (vous vérifierez à la calculatrice, mais ça se joue à pas grand chose).

Exercice 7 (*)

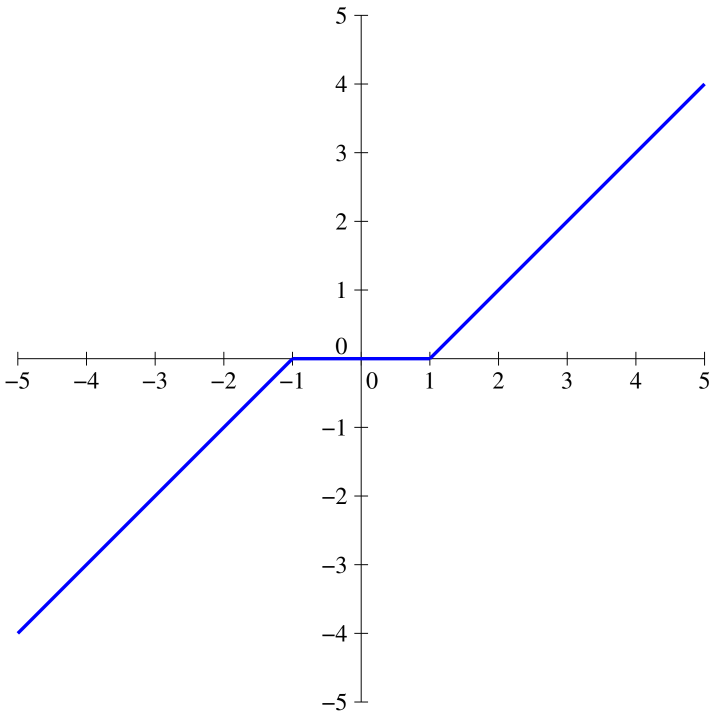
Posons $y = f(x)$ pour alléger un peu les calculs. On a donc $f(x+1) = \dfrac{y-5}{y-3}$, puis en appliquant la formule à $x+1$ (qui est un réel comme un autre), $f(x+2) = \dfrac{f(x+1)-5}{f(x+1)-3} = \dfrac{\frac{y-5}{y-3}-5}{\frac{y-5}{y-3}-3} = \dfrac{y-5-5(y-3)}{y-5-3(y-3)} = \dfrac{10-4y}{4-2y} = \dfrac{2y-5}{y-2}$. Allez, encore un petit tour dans la machine, en appliquant la dernière formule obtenue à $x+2$: $f(x+4) = \dfrac{2f(x+2)-5}{f(x+2)-2} = \dfrac{\dfrac{4y-10}{y-2}-5}{\frac{2y-5}{y-2}-2} = \dfrac{4y-10-5(y-2)}{2y-5-2(y-2)} = \dfrac{-y}{-1} = y$. On vient de prouver que $f(x+4) = f(x)$, la fonction f est donc bien 4-périodique.

Exercice 8 (*)

Puisque la condition doit être vérifiée pour tout réel non nul, on a le droit de remplacer x par $\frac{1}{x}$ dans la formule pour obtenir $f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{1}{x^2}$. En multipliant cette équation par 3 et en lui soustrayant celle de l'énoncé, on obtient alors $8f(x) = \frac{3}{x^2} - x^2$, donc $f(x) = \frac{3}{8x^2} - \frac{x^2}{8}$. Il n'a donc qu'une seule fonction solution possible. On vérifie aisément qu'elle est bien solution : $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{8x^2} - \frac{x^2}{8} + \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{8x^2} = x^2$.

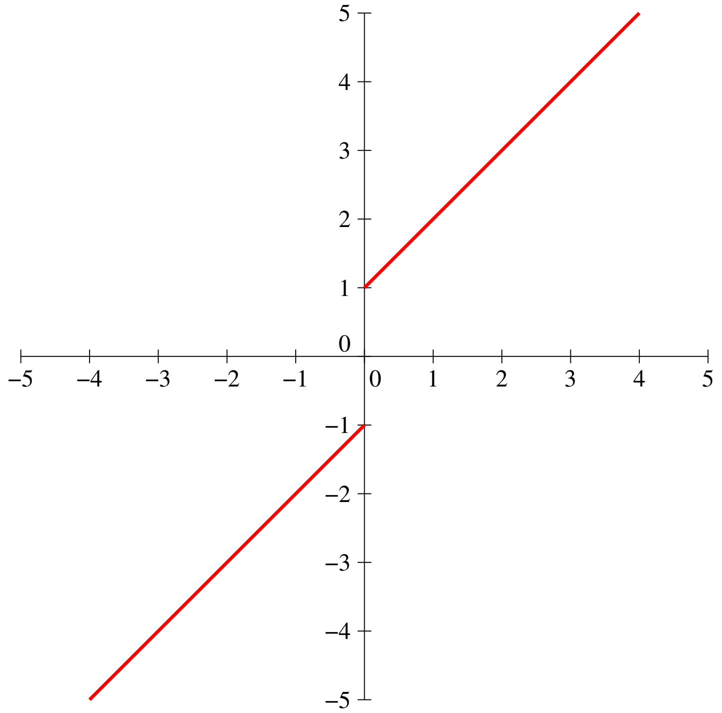
Exercice 9 (**)

1. La fonction, bien que définie par morceaux, est gentiment continue sur $\mathbb{R}$:



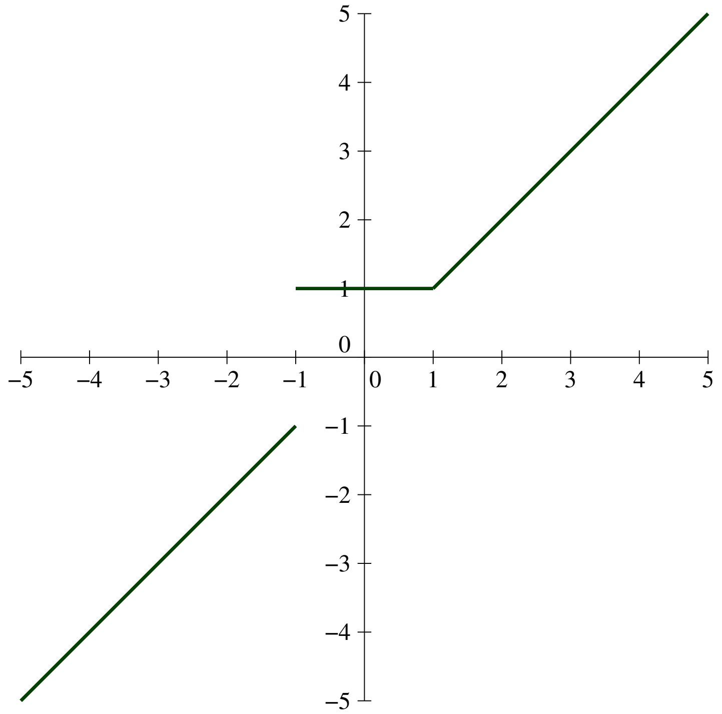
2. On peut simplement distinguer trois cas, qui correspondent aux trois morceaux de la courbe précédente :
   - si $y = 0$, f devient strictement positive à droite de $x = 1$, donc $g(0) = 1$
   - si $y > 0$, $f(y+1) = y$ et f est ensuite strictement croissante, donc $g(y) = y + 1$ (formule qui est donc également valable pour $y = 0$)
   - si $y < 0$, $f(y-1) = y$ et f ne prend des valeurs strictement supérieures à y qu'après avoir atteint cette valeur $y - 1$, donc $g(y) = y - 1$

   Ce qui donne la courbe passionnante suivante (cette fois-ci, la fonction n'est pas continue) :



3. Commençons par $g \circ f$, en distinguant à nouveau trois cas :
   - si $x < -1$, $f(x) = x + 1 < 0$, donc $g(f(x)) = f(x) - 1 = x$
   - si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 0$, donc $g(f(x)) = 1$
   - si $x > 1$, $f(x) = x - 1 \geqslant 0$, donc $g(f(x)) = f(x) + 1 = x$

   D'où la courbe suivante :



   Passons enfin à la deuxième composée, en distinguant seulement deux cas :
   - si $x \leqslant 0$, $g(x) = x - 1 \leqslant -1$, donc $f \circ g(x) = g(x) + 1 = x$
   - si $x \geqslant 0$, $g(x) = x + 1 \geqslant 1$, donc $f \circ g(c) = g(x) - 1 = x$

Autrement dit, la fonction $f \circ g$ est simplement la fonction identité, je me permets de me dispenser de la dernière courbe.

Exercice 10 (**)

1. Un calcul brutal devrait fonctionner : $\dfrac{2}{\text{th}(2x)} - \dfrac{1}{\text{th}(x)} = \dfrac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{e^{2x}-e^{-2x}} - \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
$= \dfrac{2(e^{2x}+e^{-2x})(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^{2x}-e^{-2x})}{(e^{2x}-e^{-2x})(e^x-e^{-x})}$
$= \dfrac{2e^{3x}-2e^x+2e^{-x}-2e^{-3x}-e^{3x}+e^{-x}-e^x+e^{-3x}}{(e^{2x}-e^{-2x})(e^x-e^{-x})} = \dfrac{e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x}}{(e^{2x}-e^{-2x})(e^x-e^{-x})}$
$= \dfrac{(e^x-e^{-x})^3}{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})} = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \text{th}(x)$ (un peu d'identités remarquables en passant pour factoriser numérateur et dénominateur après avoir tout regroupé et développé).

2. En utilisant la question précédente, on peut écrire $E^k \,\text{th}(2^k x) = \dfrac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1}x)} - \dfrac{2^k}{\text{th}(2^k x)}$. La somme devient alors télescopique, elle est égale à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)} = \frac{2^n}{\tan(2^n x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}$. Remarqons en passant que l'énoncé aurait du exclure la valeur $x = 0$ pour tous ces calculs.

Exercice 11 (*)

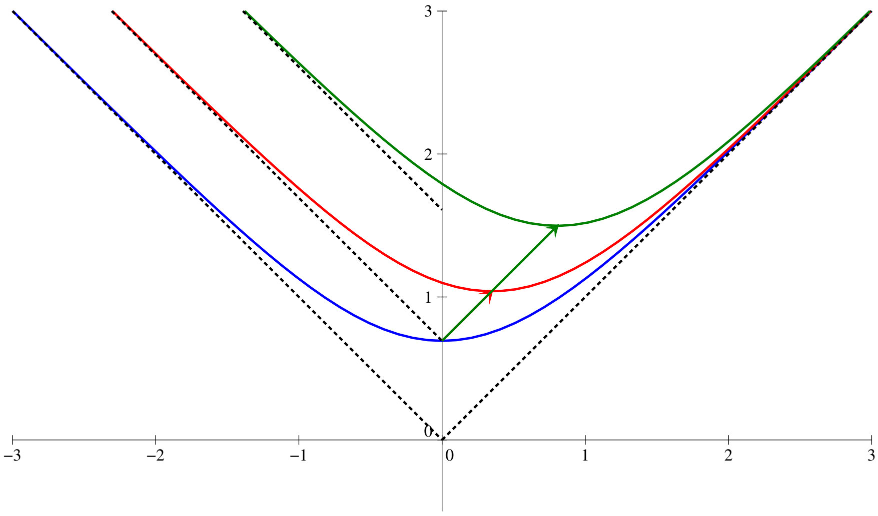
1. Puisqu'on a supposé $m > 0$, ce qui se trouve dans le ln est une somme de termes strictement positifs, donc $\mathcal{D}_{f_m} = \mathbb{R}$.

2. La fonction f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_m'(x) = \dfrac{e^x - me^{-x}}{e^x + me^{-x}}$, dérivée qui est du signe de son numérateur. Ce numérateur est lui-même strictement croissant (différence d'une fontion croissante et d'une fonction décroissante) et s'annule lorsque $e^x = me^{-x}$, soit $e^{2x} = m$, donc $x = \dfrac{1}{2}\ln(m)$. La fonction f_m est donc décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\ln(m)\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\ln(m), +\infty\right[$. On peut calculer la valeur du minimum si on est un peu courageux : $f_m\left(\dfrac{1}{2}\ln(m)\right) = f_m(\ln(\sqrt{m})) = \ln\left(\sqrt{m} + \dfrac{m}{\sqrt{m}}\right) = \ln(2\sqrt{m})$.

   Pour le calcul des limites, le mieux est de déterminer directement les asymptotes en effectuant une (ou plutôt deux) factorisations dans le ln. On peut en effet écrire $f_m(x) = \ln(e^x(1+me^{-2x})) = x + \ln(1+me^{-2x})$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+me^{-2x}) = 0$, cette première écriture prouve que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à toutes les courbes représentatives des fonctions f_m. De façon similaire, $f_m(x) = \ln(e^{-x}(m+e^{2x})) = -x + \ln(m) + \ln\left(1 + \dfrac{e^{2x}}{m}\right)$, ce qui prouve cette fois que la droite d'équation $y = -x + \ln(m)$ est asymptote à la courbe du côté de $-\infty$.

3. Notons déjà que $f_1(x) = \ln(e^x + e^{-x})$, fonction pour laquelle la minimum se situe quand $x = 0$. Il va donc falloir faire apparaitre un décalage de $\dfrac{1}{2}\ln(m)$ quelque part, ce qui se fait avec un petit peu d'astuce : $f_m(x) = \ln\left(\sqrt{m}\left(\frac{e^x}{\sqrt{m}} + \sqrt{m}e^{-x}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m) + \ln(e^{x-\frac{1}{2}\ln(m)} +$

$e^{-x+\frac{1}{2}\ln(m)}) = \frac{1}{2}\ln(m) + f_1\left(x - \frac{1}{2}\ln(m)\right)$. La courbe est donc obtenue en effectuant à la fois une traslation de vecteur $\frac{1}{2}\ln(m)\vec{i}$ et une translation de vecteur $\frac{1}{2}\ln(m)\vec{j}$, donc une seule translation de vecteur $\frac{1}{2}\ln(m)(\vec{i}+\vec{j})$. Ci-dessous, une illustration avec la courbe $\mathcal{C}_1$ en bleu, la courbe $\mathcal{C}_2$ en rouge et la courbe $\mathcal{C}_5$ en vert (les vecteurs de translation sont indiqués au niveau des minimums, les asymptotes en pointillés noirs) :



Exercice 12 (**)

1. La fonction f est bien sûr définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. De façon évidente, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Et comme $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln(x) = 0$ (croissance comparée), on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln(2)$.
2. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition, et $f'(x) = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$. Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(x)+2$, la dérivée s'annule en particulier pour $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$. Après avoir calculé $f(e^{-2}) = \frac{1}{e} \times (-2) + \ln(2) = \ln(2) - \frac{2}{e}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
f	$\ln(2)$	$\searrow$	$\ln(2)-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après le tableau de variations, f est bijective de $]0, e^{-2}]$ vers $\left[\ln(2) - \frac{2}{e}, \ln(2)\right[$, et elle l'est aussi de $[e^{-2}, +\infty[$ vers $\left[\ln(2) - \frac{2}{e}, +\infty\right[$. Or, $\ln(2) - \frac{2}{e} \simeq -0.03 < 0$, ce qui prouve l'existence d'une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur chacun des deux intervalles où f est bijective. Il y a donc deux solutions à l'équation.
4. (a) On calcule $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln(2) = -\frac{2\ln(n)}{n} + \ln(2)$. Cette expression s'annule si $2\ln(n) = n\ln(2)$, soit en passant tout à l'exponentielle $n^2 = 2^n$.

   (b) Le nombre 2^n étant pair, n^2 est pair, et n aussi (le carré d'un nombre entier a toujours la même parité que le nombre lui-même). On peut donc poser $n = 2p$ pour trouver la condition équivalente $(2p)^2 = 2^{2p}$, soit $4p^2 = 2^{2p}$, ou encore $p^2 = 2^{2p-2} = (2^{p-1})^2$, ce qui implique bien $p = 2^{p-1}$ (tous ces nombres sont positifs).

(c) L'égalité précédente est manifestement vérifiée lorsque $p = 1$ (puisque $2^0 = 1$) et lorsque $p = 2$ (puisque $2^1 = 2$), ce qui correspond aux deux solution suivantes de l'équation $f(x) = 0$: $x = \dfrac{1}{(2 \times 1)^2} = \dfrac{1}{4}$, et $x = \dfrac{1}{(2 \times 2)^2} = \dfrac{1}{16}$. Ce sont évidemment les seules solutions de cette équation, puisqu'on sait qu'elle n'en possède que deux.

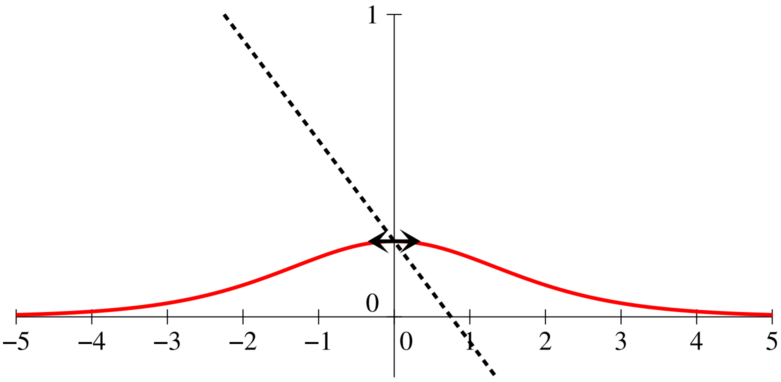
5. Il ne reste plus qu'à faire le lien avec l'équation de départ : pour un x nécessairement positif, $x^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$ donne, en passant tout au ln, l'équation équivalente $\sqrt{x}\ln(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, soit $f(x) = 0$. Les solutions de l'équation (E) sont donc les deux réels $x = \dfrac{1}{4}$ et $x = \dfrac{1}{16}$.

Exercice 13 (**)

1. Le dénominateur de f ne s'annulant jamais (puisque $e^x + 1$ est toujours strictement positif), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Comme $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$, la fonction f est paire.
3. Quand x tend vers $-\infty$, le numérateur de f tend vers 0 et son dénominateur vers 1, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La fonction étant paire, on aura aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (ce qu'on peut retrouver par un calcul direct, par exemple en développant le dénominateur et en factorisant tout par e^x).
4. Calculons donc : $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \dfrac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, le signe du numérateur dépend uniquement de celui de $1 - e^x$, qui est positif quand $e^x \leqslant 1$, c'est-à-dire quand $x \leqslant 0$. D'où le tableau de variations suivant ($f(0) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

5. Puisque $e^{\ln 2} = 2$, on a $f(\ln 2) = \dfrac{2}{(1+2)^2} = \dfrac{2}{9}$, et $f'(\ln 2) = \dfrac{2(1-2)}{(1+2)^3} = -\dfrac{2}{27}$. L'équation de la tangente est donc $y = -\dfrac{2}{27}(x - \ln 2) + \dfrac{2}{9} = -\dfrac{2}{27}x + \dfrac{2}{9}\left(1 + \dfrac{\ln 2}{3}\right)$.
6. Le fait que $f'(x)$ soit négatif sur cet intervalle a déjà été vu. De plus, $f'(x) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3e^x(1-e^x) + (1+e^x)^3}{(1+e^x)^3} = \dfrac{3e^x - 3e^{2x} + 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{1 + 6e^x + e^{3x}}{(1+e^x)^3} \geqslant 0$, d'où la deuxième inégalité demandée.
7. Posons $a(x) = f(x) + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}$. Comme $a'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{3} \geqslant 0$, la fonction a est croissante sur $[0, +\infty[$. Or, $a(0) = f(0) - \dfrac{1}{4} = 0$, donc la fonction a prend des valeurs positives sur $[0, +\infty[$, ce qui revient à ce qu'on voulait prouver.
8. Voici les courbes, avec la droite en pointillés :



Exercice 14 (**)

1. Pour que f soit définie, on doit avoir $x > 0$ et $1-x > 0$, d'où $\mathcal{D}_f =]0,1[$. On a de façon évidente $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)\ln(1-x) = 0$, et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. De même, $\lim\limits_{x\to 1} x\ln(x) = 0$ (pas de forme indéterminée) et $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = 0$ par croissance comparée (mais oui, en posant $X = 1-x$, on se ramène tout simplement à $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X)$), donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

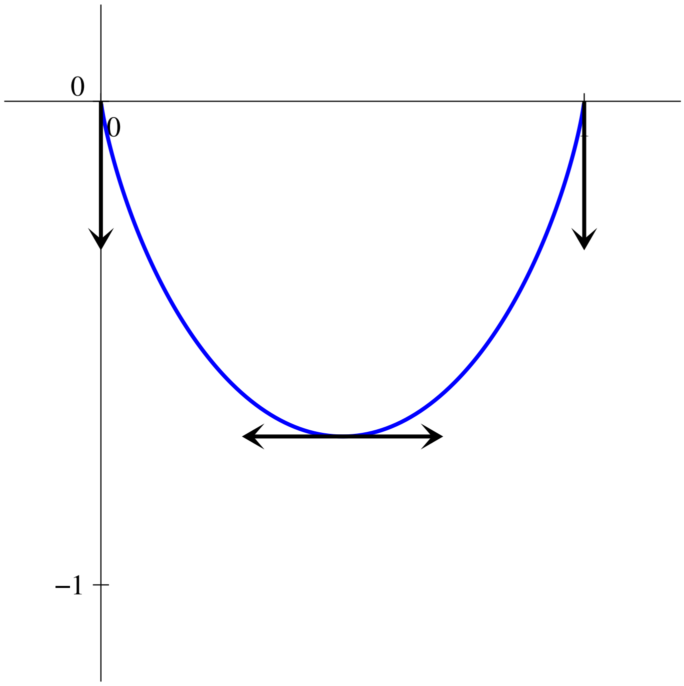
2. Il s'agit de la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

3. Contentons-nous simplement de calculer la dérivée : $f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - \dfrac{1-x}{1-x} = \ln(x) - \ln(1-x)$ (on peut regrouper sous la forme d'un seul ln de quotient, mais ça n'a aucun intérêt). Par croissance de la fonction ln, cette dérivée est positive si $x \geqslant 1-x$, donc si $x \geqslant \dfrac{1}{2}$. La fonction f admettra en particulier un minimum en $\dfrac{1}{2}$, de valeur $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f	0	$\searrow$	$-\ln(2)$	$\nearrow$	0

4. Aucune forme indéterminée, on obtient directement $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ va donc devenir « de plus en plus verticale » aux bords de l'intervalle $]0,1[$ (en fait, en effectuant deux prolongements pas continuité en 0 et en 1, on prouverait qu'il y a des deux côtés des tangentes verticales à la courbe).

5. Pas grand chose de très passionnant à indiquer sur cette courbe :



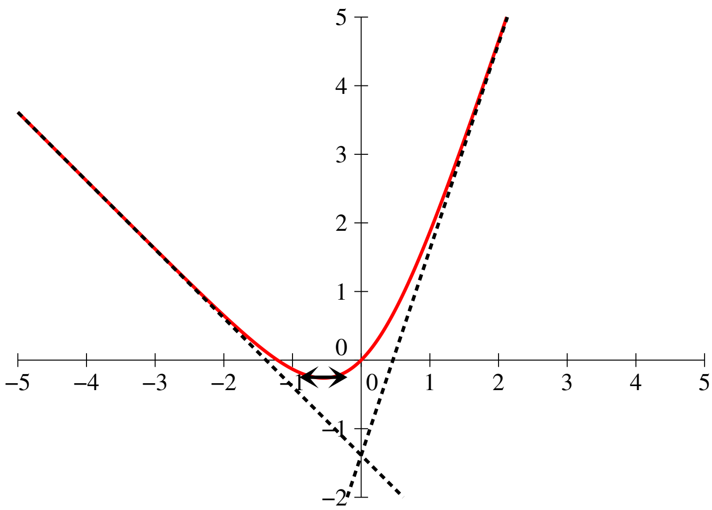
6. Il suffit d'écrire cette expression sous forme exponentielle $e^{x\ln(x)}e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{f(x)}$ pour constater (la fonction exponentielle étant strictement croissante) que son minimum sur $]0,1[$ est atteint au même endroit que celui de f, donc quand $x = \dfrac{1}{2}$, et a pour valeur $e^{-\ln(2)} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 15 (**)

1. La fonction f est définie lorsque $\text{ch}(x) > 0$, c'est-à-dire tout le temps, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Calculons donc : $f(0) = 0 + 2\ln(1) = 0$; $f(\ln(2)) = \ln(2) + 2\ln\left(\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2}\right) = \ln(2) + 2\ln(5) - 2\ln(4) = 2\ln(5) - 3\ln(2)$; et enfin $f(-\ln(3)) = -\ln(3) + 2\ln\left(\dfrac{\frac{1}{3}+3}{2}\right) = -\ln(3) + 2\ln(5) - 2\ln(3) = 2\ln(5) - 3\ln(3)$.
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 + 2\dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = 1 + \dfrac{2e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{3e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Cette dérivée est du signe de $3e^x - e^{-x} = e^{-x}(3e^{2x} - 1)$. Elle s'annule lorsque $e^{2x} = \dfrac{1}{3}$, soit $2x = -\ln(3)$, donc $x = -\dfrac{1}{2}\ln(3)$. La dérivée est négative avant cette valeur d'annulation, positive après. De plus, $e^{-\frac{1}{2}\ln(3)} = 3^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, et $e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = \sqrt{3}$, donc le minimum de notre fonction vaut $f\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(3) + 2\ln\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(3) + 2\ln\left(\dfrac{4}{2\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(3) + 2\ln(2) - 2\ln(\sqrt{3}) = 2\ln(2) - \dfrac{3}{2}\ln(3) \simeq -0.25$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant (en ajoutant dedans les calculs de limites effectués ensuite) :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\ln(3)$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln(2)-\frac{3}{2}\ln(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On peut écrire $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{2}$ et en déduire que $f(x) = x + 2\ln\left(\dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{2}\right) = x+2x+2\ln(1+e^{-2x})-2\ln(2)$, ce qui correspond exactement à la formule de l'énoncé. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-2x}) = 0$ (pas de forme indéterminée ici), on en déduit facilement, d'une part que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et d'autre part que la droite d'équation $y = 3x?2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe (puisque l'écart entre $f(x)$ et cette valeur tend vers 0). La position relative est donnée par le signe de $\ln(1+e^{-2x})$. Or, e^{-2x} étant toujours positif, ce nombre est lui-même toujours positif : la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.
5. C'est extrêmement similaire : $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^{-x}(1+2e^x)}{2}$, puis $f(x) = -x+2\ln(1+e^{2x})-2\ln(2)$. Les conclusions sont également très proches : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, et la droite d'équation $y = -x-2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe, cette dernière étant toujours située au-dessus de son (autre) asymptote.
6. Eh bien, une petite courbe pour finir :



Exercice 16 (**)

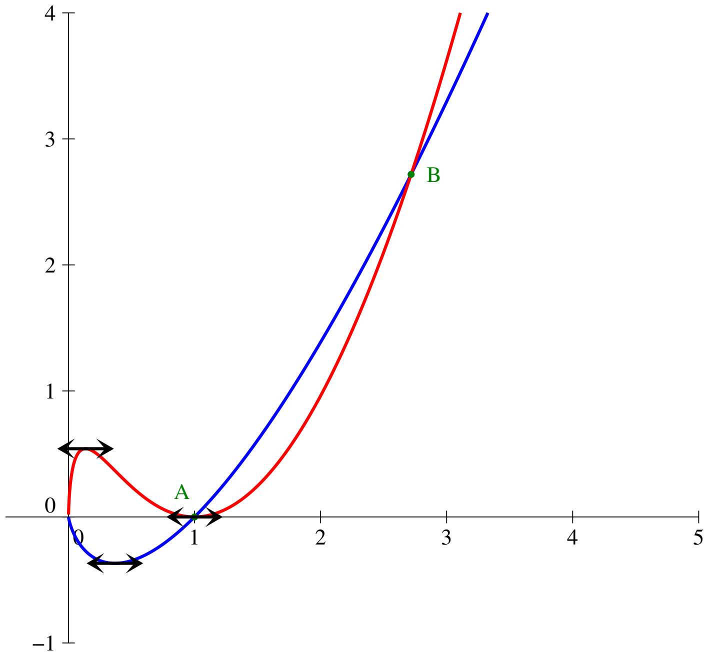
1. On a bien entendu $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et il suffit d'invoquer les résultats de croissance comparée du cours pour affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$.
2. La fonction $f_1 : x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f_1'(x) = \ln(x)+1$. Cette dérivée s'annule en $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, et la fonction f_1 y admet un minimum de valeur $f_1\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \times (-1) = -\dfrac{1}{e}$. On peut donc dresser le tableau suivant pour la fonction f_1 :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Passons à $f_2 : x \mapsto x \ln^2(x)$. Cette fonction est également dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f_3'(x) = \ln^2(x) + x \times \dfrac{2\ln(x)}{x} = \ln(x)(\ln(x) + 2)$. Cette dérivée va donc s'annuler en $x = 1$ et en $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$. Calculons $f_2(1) = 0$ et $f_2\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$ avant de dresser un tableau de variations complet :

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Résolvons donc : $x\ln(x) = x\ln^2(x)$ se produit lorsque $x = 0$ (valeur n'appartenant pas à notre domaine de définition), $\ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 1$, ce qui donne deux solutions : $x = 1$ et $x = e$. Comme $f_2(x) - f_1(x) = x\ln(x)(\ln(x) - 1)$, qui est du signe de $\ln(x)(\ln(x) - 1)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, la courbe $\mathcal{C}_1$ sera en-dessous de $\mathcal{C}_2$ sur l'intervalle $[1, e]$, et au-dessus sur $]0, 1]$ et sur $[e, +\infty[$. Plus généralement, on aura toujours $f_n(1) = 0$ et $f_n(e) = e$, ce qui prouve que toutes les courbes passent par les deux points $A(1, 0)$ et $B(e, e)$.
4. C'est le même raisonnement que ci-dessus : on calcule $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x\ln^n(x)(\ln(x) - 1)$. Lorsque n est un entier pair, cette différence est du signe de $\ln(x) - 1$, donc $\mathcal{C}_{\backslash+\infty}$ sera en-dessous de $\mathcal{C}_n$ sur $]0, e]$ et au-dessus sur $[e, +\infty[$. Quand n est un entier impair, il y a un changement de signe supplémentaire quand $x = 1$ (puisque $\ln^n(x)$ y change alors de signe), donc $\mathcal{C}_{n+1}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_n$ seulement sur l'intervalle $[1, e]$, et au-dessus sur $]0, 1]$ et sur $[e, +\infty[$ dans ce cas.
5. Toutes les courbes correspondant à des valeurs paires de n seront situées au-dessus de l'axe des abscisses sur $]0, 1[$, et celles correspondant à des valeurs impaires de n seront en-dessous. La seule chose à comparer est donc la position des courbes « paires » (entre elles) et celle des courbes »impaires ». Pour celà, on peut calculer $f_{n+2}(x) - f_n(x) = x\ln^n(x)(\ln^2(x) - 1)$. Le facteur $x\ln^n(x)$ est de signe constant sur $]0, 1[$ (positif si n est pair, négatif si n est impair), et $\ln^2(x) - 1$ change de signe lorsque $\ln(x) = -1$ (et aussi lorsque $\ln(x) = 1$ bien entendu, mais c'est en-dehors de notre intervalle d'étude), soit lorsque $x = \dfrac{1}{e}$. Ca facteur est positif sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ et négatif sur $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$. On en déduit que les courbes « paires » sont « de plus en plus haut » (la courbe $\mathcal{C}_{2p}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{2p}$ si $k > p$ sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ et « de plus en plus bas » sur $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$. C'est le contraire pour les courbes « impaires ».
6. Voici les courbes, $\mathcal{C}_1$ en bleu, $\mathcal{C}_2$ en rouge :



7. Dérivons donc la fonction f_n : $f_n'(x) = \ln^n(x) + x \times \dfrac{n \ln^{n-1}(x)}{x} = \ln^{n-1}(x)(\ln(x) + n)$. Cette dérivée s'annule en $x = 1$ et lorsque $\ln(x) = -n$, soit $x = \dfrac{1}{e^n}$. On calcule donc $f_n\left(\dfrac{1}{e^n}\right) = \dfrac{1}{e^n} \times (-n)^n = \left(-\dfrac{n}{e}\right)^n$. On obtient le tableau de variations suivant lorsque n est pair (et donc que $\ln^{n-1}(x)$ est toujours positif) :

x	0		$\frac{1}{e^n}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{n^n}{e^n}$	$\nearrow$	$+\infty$

Et le tableau suivant lorsque n est pair :

x	0		1		$\frac{1}{e^n}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{n^n}{e^n}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 17 (***)

1. La seule chose pouvant poser problème est de qui se trouve dans le ln, f est donc définie en x si $\dfrac{x+2}{x} > 0$, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ (normalement, pas besoin d'écrire un tableau de signes pour un cas aussi simple).

2. (a) Lorsque $x > 0$, on peut écrire $f(x) = x\ln(x+2) - x\ln(x) + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$. Les résultats classiques de croissance comparée nous permettent d'affirmer que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ et le reste ne pose

aucun problème, donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

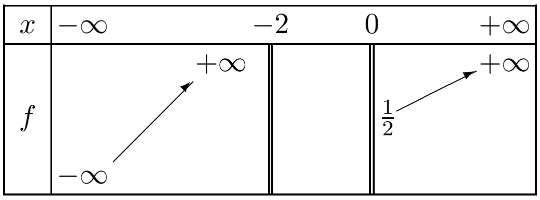
(b) Lorsque $x > 0$, on a $\ln(x+2) > \ln(x)$ (puisque la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$), donc $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > 0$ et $f(x) > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$, ce qui suffit bien entendu à affirmer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour répondre tout à fait complètement à la question, on peut signaler que, sur $]-\infty,-2[$, on peut écrire $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = x\ln(-x-2) - x\ln(-x)$, et on en déduit que $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > 0$ comme précédemment.

(c) Posons donc $x = \frac{2}{u}$, on a alors (en multipliant numérateur et dénominateur par u) $\frac{x+2}{x} = \frac{2+2u}{2} = 1+u$, donc $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2\frac{\ln(1+u)}{u}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} u = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ (limite classique vue en cours). La limite demandée dans l'énoncé en découle immédiatement, et on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 2$, ou encore que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{4} - \frac{5}{2} = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$. Elle l'est d'ailleurs également en $-\infty$ puisque le même calcule reste valable.

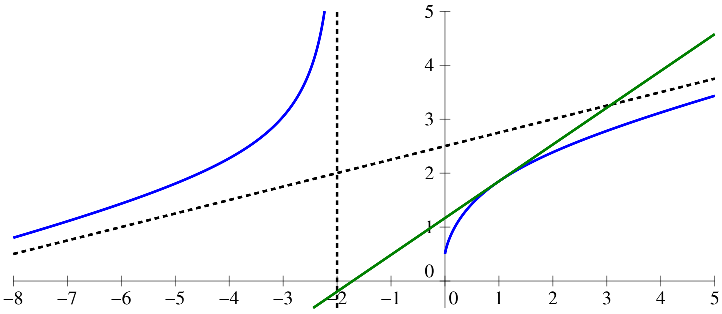
3. (a) Commençons par remarquer qu'en posant $h(x) = \frac{x+2}{x}$, on aura $h'(x) = \frac{x-(x+2)}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$. On en déduit que $f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x \times \frac{-2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{1}{4} = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$. Autrement dit, on aura $g(x) = f'(x)$ partout où g est définie, autrement dit sur $\mathbb{R}^{+*}$ (alors que f' est quant à elle définie également sur $]-\infty,-2[$).

(b) Dérivons donc g : $g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2}$
$= \frac{x(x+2)-(x+2)^2+2x}{x(x+2)^2} = \frac{x^2+2x-x^2-4x-4+2x}{x(x+2)^2} = -\frac{4}{x(x+2)^2}$, expression strictement négative sur $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction g est donc strictement décroissante. De plus, $\lim x \to 0^+ g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée, donc aucune difficulté) et on peut écrire $g(x) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$ pour se convaincre que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{4}$.

(c) En effet, g est bijective de $]0,+\infty[$ vers $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$, et en particulier strictement positive. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Reste à gérer l'intervalle $]-\infty,2[$, sur lequel on peut écrire $f'(x) = \ln(-x-2) - \ln(-x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$. Cette expression a exactement la même dérivée que la fonction g étudiée à la question précédente, on a donc toujours $f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$, ce qui prouve que f' est strictement croissante sur $]-\infty,-2[$. Or, $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \frac{1}{4}$ (même calcul sans difficulté qu'en $+\infty$), donc f' est strictement positive sur $]-\infty,-2[$. Il ne reste plus qu'à calculer les limites manquantes pour f pour pouvoir dresser un tableau de variations complet : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ à cause de la présente de l'asymptote oblique déjà signalée, et $\lim_{x\to-2^-} \frac{x+2}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to-2^-} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$. Le tableau complet :



4. On calcule donc $f(1) = \ln(3) + \dfrac{3}{4}$ et $f'(1) = \ln(3) - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \ln(3) - \dfrac{5}{12}$. La tangente recherchée a donc pour équation $y = \left(\ln(3) - \dfrac{5}{12}\right)(x-1) + \ln(3) + \dfrac{3}{4} = \left(\ln(3) + \dfrac{5}{12}\right)x + \dfrac{7}{6}$. Le coefficient directeur de la tangente est donc $\ln(3) - \dfrac{5}{12} \simeq 1.1 - 0.4 \simeq 0.7$, et son ordonnée à l'origine $\dfrac{7}{6} \simeq 1.2$.
5. Voici la courbe demandée (en bleu, avec la tangente de la question précédente en vert) :



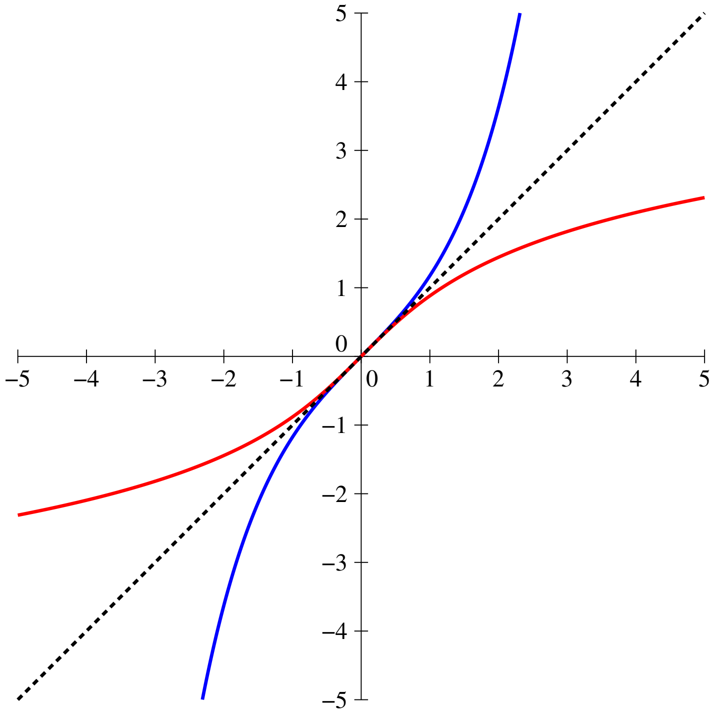
Exercice 18 (**)

Pour gagner un tout petit de temps, on utilisera les « formules » $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$, qui découent immédiatement de la définition des fonction hyperboliques.

1. Des formules précédentes, on peut déduire que $\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{sh}(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(y))(\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y))$. De la même façon, on obtiendrait $\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{sh}(x+y) = (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(y))$. En développant tout brutalement, $\mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$, et $\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) - \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$. En faisant la somme des deux équations et en divisant par 2, on obtient alors $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.
2. On reprend les calculs ci-dessus, mais cette fois on fait la différence des deux équations avant de diviser par 2 pour trouver $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y)$.
3. On divise les deux formules, puis on divise tout en haut et en bas par $\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)$, ce qui donne $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)}{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)} = \dfrac{\mathrm{th}(y) + \mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$.

Exercice 19 (***)

1. La fonction sh étant par continue et strictement croissante, le théorème de la bijection nous assure qu'elle est bijective. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$, la fonction sh est tout simplement bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Toujours en utilisant le théorème de la bijection, Argsh aura « le même » tableau de variations que sh : strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec des limites respectivement égales à $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Les courbes exactes des deux fonctions ressemblent à ceci (courbe de sh en bleu, courbe de Argsh en rouge, axe de symétrie d'équation $y = x$ en pointillés noirs) :



2. Il s'agit donc (quitte à multiplier par 2) de résoudre l'équation $e^x - e^{-x} = 2$. Multiplions également pas e^x tant qu'on y est (qui est strictement positif) pour obtenir l'équation équivalente $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$. Il ne reste plus qu'à poser $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 8$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $X_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. La première racine obtenue est strictement négative et ne correspond donc à aucune valeur possible pour x. Notre équation admet donc une solution unique (heureusement vu la bijectivité de sh) égale à $\ln(X_2) = \ln(1+\sqrt{2})$.
3. On fait exactement comme précédemment : $e^x - e^{-x} = 2y$, donc après changement de variable $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1)$, qui est manifestement toujours positif, et admet pour solutions $X_1 = \dfrac{2y - 2\sqrt{1+y^2}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$, et $X_2 = y + \sqrt{y^2+1}$. La première solution est toujours strictement négative (car $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$, donc $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ quel que soit le signe de y), on ne trouve donc qu'une seule solution à notre équation : $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
4. Par définition de ce qu'est une réciproque, on a $y = \mathrm{sh}(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{Argsh}(y)$, donc la question précédente prouve que $\mathrm{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
5. Posons $u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ et commençons par calculer $u'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. On en déduit que $\mathrm{Argsh}'(y) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
6. La formule vue en cours affirme que $\mathrm{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{Argsh}(x))} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x))}$. Or, on sait que $\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argsh}(x)) = 1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{Argsh}(x)) = 1 + x^2$ puisque les fonctions Argsh et sh sont réciproques l'une de l'autre. La fonction ch étant à valeurs positives, on peut en déduire que $\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(y)) = \sqrt{1+y^2}$, et on retrouve bien la formule précédente.
7. Pour que la fonction ch devienne injective, il faut la restreindre à $[0, +\infty[$. Cette restriction étant strictement croissante, elle sera alors bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[1, +\infty[$. Pour obtenir une expression de la réciproque (qui sera donc définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$, à valeurs positives), on doit résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$, soit $e^x + e^{-x} = 2y$. Comme tout à l'heure, on multiplie

tout par e^x puis on pose $X = e^x$ pour obtenir l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Le discriminant $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$ est positif lorsque $y \geqslant 1$ (condition imposée par le domaine de définition de la réciproque), et l'équation admet alors pour solutions $X_1 = \dfrac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1}$ et $X_2 = \dfrac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}$. On ne conserve que la deuxième solution (la plus grande des deux), qui est la seule à être plus grande que 1 et donc à avoir un ln positif. On en déduit que $\text{Argch}(y) = \ln(X_2) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

8. Le premier qui serait tenté de prétendre qu'il suffit de faire le quotient des formules obtenues pour Argsh et Argch n'a pas bien compris la notion de réciproque. Commençons par noter que la fonction th est continue et strictement croissante, donc bijective de $\mathbb{R}$ vers son intervalle image $]-1, 1[$. Sa réciproque sera donc définie sur $]-1, 1[$, et on va l'obtenir comme les précédentes, en partant de l'équation $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$, qu'on peut mettre sous la forme $e^x - e^{-x} = ye^x + ye^{-x}$, soit $e^x(1-y) = e^{-x}(1+y)$, ou encore $e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$. Même pas besoin de poser un changement de variable cette fois-ci, on se contente de passer au ln, ce qu'on a le droit le faire uniquement si $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$, donc si $y \in]-1, 1[$. Ça tombe bien, c'est justement la condition imposée par l'intervalle de définition de notre réciproque. On obtient alors $2x = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$, soit $x = \dfrac{1}{2}(\ln(1+y) - \ln(1-y))$. On peut désormais conclure : la réciproque de th est la fonction définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par $\text{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$. En particulier, sa dérivée est $\text{Argth}'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x^2}$. En fait, c'est tout à fait normal : comme $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$, la formule de dérivation de la réciproque assure que $\text{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1 - \text{th}^2(\text{Argth}(x))} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

   Le calcul d'intégrale demandé est un piège immonde puisqu'on ne peut pas utiliser la fonction Argth (on est en-dehors de son intervalle de définition). En fait, ça n'a pas d'importance, on peut garder la formule explicite « avec des ln » pour obtenir une primitive, en changeant simplement un signe pour avoir une fonction définie sur l'intervalle $[2, 3]$: en posant $f(x) = \dfrac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(x-1))$, on aura toujours $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, donc $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(x-1)]_2^3 = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(2) - \ln(3) + \ln(1)) = \frac{\ln(2) - \ln(3)}{2}$ (la valeur est négative, ce qui est tout à fait normal).

Exercice 20 (***)

1. Comme d'habitude, on a trois propriétés à vérifier :

   - on peut toujours écrire $f = \text{id}^{-1} \circ f \circ \text{id}$ (l'application identité étant sa propre réciproque, bien entendu) ce qui prouve que $f \sim f$ et donc que $\sim$ est une relation réflexive.
   - si $f = h^{-1} \circ g \circ h$, on peut composer la relation à gauche par h et à droite par h^{-1} pour obtenir $h \circ f \circ h^{-1} = g$. Comme h^{-1} est une application bijective de réciproque h, cela prouve que $g \sim f$, et la relation $\sim$ est donc symétrique.
   - supposons enfin que $f \sim g$ et $g \sim k$, on peut alors trouver deux applications bijectives h et i telles que $f = h^{-1} \circ g \circ h$ et $g = i^{-1} \circ k \circ i$. En remplaçant dans la première égalité, on a donc $f = h^{-1} \circ i^{-1} \circ k \circ i \circ h = (h \circ i)^{-1} \circ f \circ (h \circ i)$ (en utilisant la relation vue en cours $(h \circ i)^{-1} = i^{-1} \circ h^{-1}$). L'application $h \circ i$ étant bijective comme composée d'applications bijectives, cela prouve que $f \circ k$, la relation $\sim$ est donc transitive.

La relation étant réflexive, symétrique et transitive, il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

2. Une application g en relation avec la fonction nulle f vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = h^{-1} \circ f \circ h(x) = h^{-1}(0)$ (puisque $f(h(x)) = 0$ indépendamment de la fonction h), donc la fonction g est nécessairement constante. Réciproquement, toute fonction constante égale à un certain réel a est bien en relation avec la fonction nulle, il suffit en fait pour le prouver de trouver une fonction bijective h vérifiant $h^{-1}(0) = a$. En posant $h(x) = x - a$, la fonction h est bijective (c'est vraiment évident) et sa réciproque, définie par $h^{-1}(x) = x + a$, vérifie bien $h^{-1}(0) = a$. Finalement, la classe d'équivalence de f contient toutes les fonctions constantes.
3. C'est encore plus simple : quelle que soit l'application bijective h, $h^{-1} \circ \mathrm{id} \circ h = h^{-1} \circ h = \mathrm{id}$, donc la classe d'équivalence de l'application identité est réduite à elle-même.
4. On sait qu'une composée d'applications injectives est injective. Si $g = h^{-1} \circ f \circ h$, avec f injective et h et h^{-1} bijectives (donc a fortiori injectives), g est donc bien injective.
5. Copier-coller de la réponse précédente en remplaçant toutes les occurrences du mot « injective » par « surjective ».
6. Bien sûr que non, on a vu plus haut que l'identité n'était en relation avec personne, donc en particulier avec aucune autre application bijective qu'elle-même.
7. Si f est bijective et $g = h^{-1} \circ f \circ h$, alors g est bijective comme composée de trois applications bijectives, et $g^{-1} = (h^{-1} \circ f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1} \circ h$, donc $g{-}1 \sim f^{-1}$ (et, curieusement, c'est la même application bijective h qui effectue le lien entre les applications f et g, et entre leurs réciproques).
8. L'énoncé laisse clairement entendre que $n \in \mathbb{N}$, mais la relation resterait vraie pour tout entier négatif en exploitant la question précédente. Supposons donc que $g = h^{-1} \circ f \circ h$, alors $g \circ g = h^{-1} \circ f \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f \circ \mathrm{id} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f^2 \circ h$, ce qui prouve que $g^2 \circ f^2$. Il n'y a plus qu'à itérer le procédé, en prouvant simplement par récurrence que $g^n = h^{-1} \circ f^n \circ h$. On a déjà vérifié l'initialisation aux rangs 1 et 2 mais ça marche aussi au rang 0 : $g^0 = \mathrm{id} = h^{-1} \circ \mathrm{id} \circ h$ est vrai. Supposons donc la propriété vraie au rang n, alors $g^{n+1} = g^n \circ g = h^{-1} \circ f^n \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f^n \circ f \circ h = h^{-1} \circ f^{n+1} \circ h$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. Bien entendu, la relation obtenue prouve que $f^n \sim g^n$ (encore une fois, c'est toujours la même bijection h qui effectue la relation).
9. C'est un calcul classique, résolvons l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$, c'est-à-dire $e^x + e^{-x} = 2y$. Après un changement de variable $X = e^x$ et une multiplication par e^x (qui ne peut jamais s'annuler), on se ramène à $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1)$, qui est manifestement toujours positif. On a donc deux solutions $X_1 = \dfrac{2y - 2\sqrt{1 + y^2}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}$, et $X_2 = y + \sqrt{y^2 + 1}$. La première solution est toujours strictement négative (car $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = |y|$, donc $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ quel que soit le signe de y), on il ne reste donc qu'une seule solution à notre équation : $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = h(y)$, ce qui prouve bien que h est la réciproque de sh.
10. On se doute qu'on doit avoir $g = \mathrm{sh} \circ f \circ h$ (ou le contraire), mais plutôt que de montrer directement l'égalité sous cette forme, il est un peu plus facile de montrer que $g \circ \mathrm{sh} = \mathrm{sh} \circ f$ (ce qui est équivalent en composant par sh à droite), autrement dit que $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}$. En utilisant la relation $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, on a $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}$ (car ch est toujours positive), il suffit donc de prouver que $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$ (formule qui devrait vous rappeler une certaine formule de duplication du sinus). C'est assez facile : $2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) = \dfrac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}(2x)$. Les fonctions f et g sont donc bien en relation pour $\sim$.

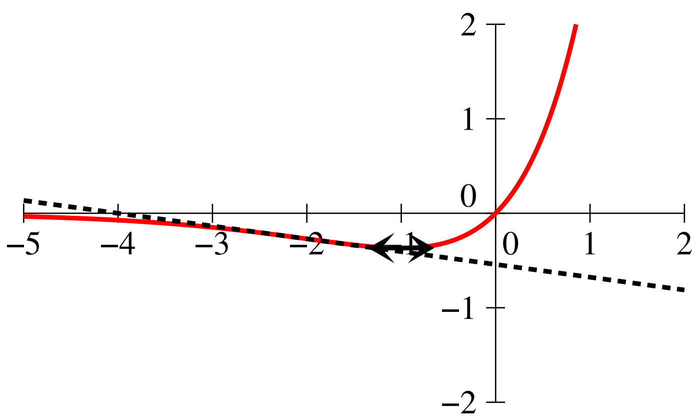
Problème 1 (***)

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. La fonction f a pour dérivée $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. La fonction admet donc un minimum en -1, de valeur $f(-1) = -\frac{1}{e}$. Sans difficulté, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et en appliquant directement un résultat de croissance comparée, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
2. (a) La fonction f' est dérivable, de dérivée $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Elle s'annule effectivement une seule fois, en $\alpha = -2$.

   (b) Puisque $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$ et $f'(-2) = -\frac{1}{e^2}$, la tangente a pour équation $y = -\frac{1}{e^2}(x+2) - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x+4)$. Elle coupe l'axe des abscisses pour $x = -4$.

   (c) On cherche donc à étudier le signe de $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4) = xe^x + \frac{1}{e^2}(x+4)$. Cette expression a la même dérivée seconde que f, sa dérivée $(x+1)e^x + \frac{1}{e^2}$ est donc décroissante sur $]-\infty, -2]$ et croissante sur $[-2, +\infty[$. Comme elle vaut $-\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2} = 0$ en -2, elle est donc toujours positive. L'expression $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule également en $x = -2$ (puisque la tangente y coupe la courbe représentative de f), on en déduit que la tangente est au-dessus de la courbe sur $]-\infty, -2]$, et en-dessous sur $[-2, +\infty[$.
3. Voici une allure de courbe :



4. La fonction f étant continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, elle y est bijective vers son intervalle image $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$. Le théorème de la bijection donne directement le tableau de variations de g :

x	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	$+\infty$

5. En utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$. Or, par définition, la fonction g vérifie $g(x)e^{g(x)} = x$. On peut donc écrire, lorsque $x \neq 0$,

$e^{g(x)} = \dfrac{x}{g(x)}$, et $g'(x) = \dfrac{g(x)}{x(g(x)+1)}$. En particulier, la fonction g est solution de l'équation différentielle $xy'(y+1) = y$.

6. En effet, cette équation s'écrit $e^{x\ln(2)} = x$, soit en multipliant chaque membre par $\ln(2)$, $\dfrac{x\ln(2)}{e^{x\ln(2)}} = \ln(2)$, donc $-x\ln(2)e^{-x\ln(2)} = -\ln(2)$. Autrement dit $f(-x\ln(2)) = -\ln(2)$, ce qui équivaut à $-x\ln(2) = g(-\ln(2))$, soit $x = -\dfrac{g(-\ln(2)}{\ln(2)}$.
7. On peut écrire l'équation sous la forme $e^{x\ln(x)} = 3$, soit $x\ln(x) = \ln(3)$. En posant $X = \ln(x)$, on se ramène à l'équation $f(X) = \ln(3)$, soit $X = g(\ln(3))$. On a donc $e^X = e^{g(\ln(3))}$, soit $x = e^{g(\ln(3))}$.

II. Des fonctions auxiliaires.

1. La fonction h_a est évidemment dérivable, de dérivée $h_a'(x) = -e^{-x} + 2ax = e^{-x}(-1 + 2af(x))$, qui est du signe de $2af(x) - 1$. Elle s'annule lorsque $f(x) = \dfrac{1}{2a}$ (valeur atteinte une unique fois par la fonction f), autrement dit en $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$. Son image par la fonction h est $h_a(m_a) = e^{-g(\frac{1}{2a})} + a\left(g\left(\dfrac{1}{2a}\right)\right)^2 = e^{-m_a} + am_a^2$. Or, par définition, $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$ implique $f(m_a) = \dfrac{1}{2a}$, soit $m_a e^{m_a} = \dfrac{1}{2a}$, donc $e^{-m_a} = 2am_a$, et $h_a(m_a) = 2am_a + am_a^2 = am_a(m_a+2)$.
2. Puisque $i(a) = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$, que $a \mapsto \dfrac{1}{2a}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que g est croissante sur son domaine de définition, i est une fonction décroissante. Par simple composition de limite, $\lim\limits_{a\to+\infty} i(a) = g(0) = 0$, et $\lim\limits_{a\to 0^+} i(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. Il suffit de constater que, si $a < b$, on aura $h_a(x) < h_b(x)$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $h_a(m_b) < h_b(m_b)$. Comme m_a est le minimum de la fonction h_a, on a également $h_a(m_a) \leqslant h_a(m_b)$, dont on déduit que $h_a(m_a) < h_b(m_b)$. La valeur du minimum est donc une fonction strictement croissante de la variable a. Reste à déterminer la limite quand a tend vers $+\infty$ de $am_a(m_a+2)$. On sait déjà que $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a = 0$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a + 2 = 2$. De plus, $am_a = \dfrac{1}{2}e^{-m_a}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} h_a(m_a) = 1$.

Problème 2 : Un peu de géométrie ! (**)

I. Une inégalité classique.

1. Posons donc $f(x) = x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3$, et étudions les variations de f sur l'intervalle $[0,1]$: la fonction est évidemment dérivable, et $f'(x) = 1 - 4x + 3x^2$, dérivée ayant pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et s'annulant en $x_1 = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et en $x_2 = \dfrac{4+2}{6} = 1$. Elle est positive sur $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, et croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$. La fonction atteint donc comme maximum sur l'intervalle $[0,1]$ la valeur $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{27}$. On a exactement prouvé ce qui était demandé.
2. (a) On va bien entendu passer par un calcul de dérivée : $f_a'(x) = -2ax + a(1-a)$. Elle s'annule en $x = \dfrac{a(1-a)}{2a} = \dfrac{1-a}{2}$, qui appartient bien sûr à l'intervalle $[0, 1-a]$. La dérivée étant

positive avant cette valeur et négative après, la fonction f_a admet pour maximum la valeur $f\left(\frac{1-a}{2}\right) = -a\frac{(1-a)^2}{4} + a(1-a)\frac{1-a}{2} = \frac{a(1-a)^2}{4}$.

(b) Commençons par fixer la valeur de a, le réel b varie alors entre 0 et $1-a$ (les trois réels étant positifs et de somme 1), et $c = 1-a-b$, donc $abc = ab(1-a-b) = -ab^2 + a(1-a)b$. La question précédente nous assure que cette valeur est maximale si $b = \frac{1-a}{2}$, ce qui revient à dire que $c = b$. Cherchons désormais la valeur de a pour laquelle abc est maximale en imposant $c = b = \frac{1-a}{2}$. On a alors $abc = \frac{a(1-a)^2}{4}$, qui est majoré d'après la première question par $\frac{1}{27}$ (il suffit de tout diviser par 4). Cela prouve que, dans les conditions données, $abc \leqslant \frac{1}{27}$.

(c) Pour maximiser abc, il faut avoir d'une part $c = b = \frac{1-a}{2}$, puis $a = \frac{1}{3}$ (question 1), ce qui impose $a = b = c = \frac{1}{3}$.

3. Posons $a = \frac{x}{x+y+z}$, $b = \frac{y}{x+y+z}$ et $c = \frac{z}{x+y+z}$. Ces trois réels a, b et c sont positifs et vérifient $a+b+c = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$. En appliquant les résultats précédents, $abc \leqslant \frac{1}{27}$. En multipliant trois fois par $x+y+z$, on trouve exactement $xyz \leqslant \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$. Un seul cas extrêmement particulier : si $x = y = z = 0$, on ne peut pas diviser par $x+y+z$, mais dans ce cas, l'inégalité demandée est triviale !
4. C'est une égalité si $a = b = c$, ce qui revient exactement à dire que $x = y = z$.

II. Applications aux triangles.

1. Dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours plus grande que le troisième côté. Ici, par exemple, $a \leqslant b+c$, donc $2a \leqslant a+b+c = 2p$, ce qui implique $2p - 2a \geqslant 0$ et donc $x \geqslant 0$. C'est exactement similaire pour les deux autres côtés.
2. Le périmètre p étant fixé, $\mathcal{A}$ est maximale quand $(p-a)(p-b)(p-c)$ est maximale d'après la formule de Héron, donc quand xyz est maximal. Le maximum de xyz est égal à $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.
   Or, $x+y+z = 3p-a-b-c = 3p-2p = p$, donc le maximum de xyz vaut $\frac{p^3}{27}$, et celui de $\mathcal{A}$ est égal à $\sqrt{p \times \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{\sqrt{27}}$.
3. Puisqu'on doit avoir $x = y = z$, cela revient à dire que $a = b = c$. Autrement dit, le triangle est alors équilatéral.

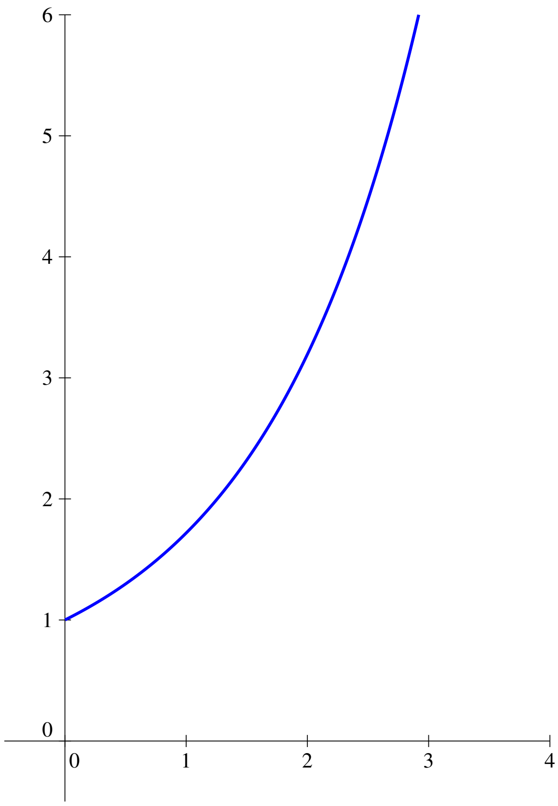
Problème 3 (**)

A. Étude de la fonction f_0.

1. La convexité de la fonction exponentielle permet d'affirmer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$ (la droite d'équation $y = x+1$ étant tangente à la courbe de l'exponentielle). On peut appliquer cette inégalité au réel $-x$ pour obtenir $e^{-x} \geqslant 1-x$, soit $e^{-x} + x - 1 \geqslant 0$. En multipliant tout par le réel positif e^x, on trouvé immédiatement la deuxième inégalité demandé : $1 + (x-1)e^x \geqslant 0$.
2. On a simplement $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Or, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (limite de taux d'accroissement), donc $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x) = 1$. De l'autre côté, on écrit $f_0(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$ et on exploite la croissance

comparée pour affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = +\infty$.

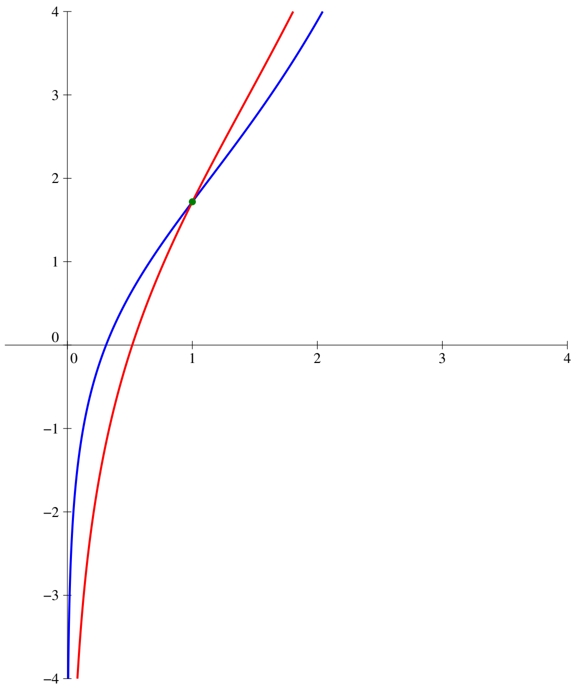
3. La fonction f_0 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_0'(x) = \dfrac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \dfrac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$. Comme on a prouvé à la première question que le numérateur de ce quotient était toujours positif, la fonction f_0 est tout simplement strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
4. Pour pouvoir tracer une allure intéressante, il faudrait au moins être capable de déterminer la direction de la courbe du côté de 0 (par exemple savoir s'il y a une tangente une fois qu'on a prolongé par continuité en rajoutant la valeur 1 correspondant à la limite en 0). Malheureusement, le calcul de $\lim\limits_{x \to 0} f_0'(x)$ dépasse nos capacités actuelles (je peux vous affirmer que cette limite existe et vaut $\dfrac{1}{2}$, mais on ne pourra le prouver qu'une fois les développements limités étudiés). En attendant, difficile de faire mieux qu'un truc extrêmement imprécis.



B. Étude de la famille de fonctions (f_n).

1. On a vu plus haut que la fonction f_0 était strictement croissante, comme la fonction $x \mapsto n\ln(x)$ l'est également, toutes les fonctions f_n sont sommes de fonctions croissantes, et donc strictement croissantes sur $]0, +\infty[$.
2. De façon évidente, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, et le calcul de la limite de f_0 en 0 effectué dans la première partie permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. On a simplement $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x)$, donc $\mathcal{C}_{n+1}$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_n$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et en-dessous sur l'intervalle $]0, 1[$. Toutes les courbes se coupent au point de coordonnées $(1, e-1)$ puisque $f_n(1) = e - 1$.
4. La fonction f_1 est continue et strictement croissante, donc bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. En particulier, elle s'annule une seule fois.

5. Comme $f_1(1) = e - 1 > 0$, la valeur d'annulation α_1 appartient nécessairement à l'intervalle $]0, 1[$. Les positions relatives obtenues pour les fifférentes courbes sur cet intervalle assurent alors que $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1) = 0$. L'annulation de la fonction f_n découle de la bijectivité de cette dernière, et comme $f_n(\alpha_1) < 0 < f_n(0)$, la stricte croissance de la fonction f_n permet d'affirmer que $\alpha_1 < \alpha_n < 1$.
6. La fonction f_0 étant croissante, $\forall x \in]0, 1]$, $f_0(x) \leqslant f_0(1)$, soit $\dfrac{e^x - 1}{x} \leqslant e - 1$. Par définition, $f_n(\alpha_n) = 0$, donc $\dfrac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + n\ln(\alpha_n) = 0$, ce qu'on peut écrire $n\ln(\alpha_n) = \dfrac{1 - e^{\alpha_n}}{\alpha_n}$. En appliquant l'inégalité obtenue juste avant, on a donc $n\ln(\alpha_n) \geqslant 1 - e$, soit $\ln(\alpha_n) \geqslant \dfrac{1-e}{n}$.
7. La majoration $\alpha_n \leqslant 1$ implique que $\ln(\alpha_n) \leqslant 0$. Combinée à la minoration de la question précédente, on a donc $\dfrac{1-e}{n} \leqslant \ln(\alpha_n) \leqslant 0$. Une simple application du théorème des gendarmes donne alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(\alpha_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = e^0 = 1$.
8. Là encore, il n'y a pas grand chose de passionnant à tracer...



C. Un peu de calcul d'intégrales.

1. Sur l'intervalle $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$, on sait que $f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t)$, donc $I_n \leqslant I_{n+1}$ (on a le droit d'intégrer des inégalités sur un intervalle). Autrement dit, la suite (I_n) est croissante.
2. Il suffit de constater que $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f_{n+1}(t) - f_n(t)\ dt = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln(t)\ dt$ est constant pour en déduire que la suite (I_n) est une suite arithémtique. On peut même calculer la valeur de la raison : $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \ln(t)\ dt = [t\ln(t) - t]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} - 0 + 1 = \frac{3\ln(3) - 3\ln(2) - 1}{2}$ (c'est très proche de 0).