Feuille d'exercices n° 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

9 octobre 2025

Exercice 1 (* à **)

Pour simplifier la présentation des calculs, on présentera en général les calculs de primitives sous la forme d'intégrales sans borne inférieure. Les calculs seront faits ligne par ligne, et on ne précisera jamais après avoir donné une intégrale qu'il existe une constante d'intégration réelle à ajouter à chaque fois :

- Ici, mieux vaut directement donner $F(x) = \dfrac{1}{4(1-2x)^2}$, primitive valable sur chacun des deux intervalles de définition de f, à savoir $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
- On reconnaît ici une fonction de la forme $u'u$ sous l'intégrale : $F(x) = \displaystyle\int^x \cos(t)\sin(t)\ dt = \dfrac{1}{2}\sin^2(x)$.
- Le seul espoir consiste ici à tenter une intégration par parties en posant $u(t) = \arctan(t)$ et $v'(t) = 1$, donc $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = t$, ce qui donne $F(x) = \displaystyle\int^x \arctan(t)\ dt = x\arctan(x) - \int^x \frac{t}{1+t^2}\ dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $F(x) = \displaystyle\int^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\ dt = \int \frac{2}{e^t + e^{-t}}\ dt = \int \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\ dt$. Effectuons le changement de variable $u = e^t$ (donc $t = \ln(u)$, ce qu'on peut faire sur n'importe quel intervalle), ce qui donne $du = e^t dt$, et transforme notre intégrale en $F(x) = \displaystyle\int^{e^x} \frac{2}{u^2+1}\ du = 2\arctan(e^x)$. Les plus curieux constateront que d'autres changements de variables sont possibles, qui donnent de façon intéressante d'autres expressions de nos primitives. Par exemple, en posant directement $u = \mathrm{sh}(t)$ dans l'intégrale initiale, $du = \mathrm{ch}(t)dt$, et $F(x) = \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\ dt = \int^{\mathrm{sh}(x)} \frac{1}{1+u^2}\ du$ puisque $\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{sh}^2(t)$. On trouve alors $F(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x))$, qui est toujours égal à $2\arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$ (avouez que ça n'a rien d'évident).
- $F(x) = \displaystyle\int^x t\sin(t)\sin^2(t)\ dt = \int^x t\sin(t)(1-\cos^2(t))\ dt = \int^x t\sin(t)\ dt - \int^x t\sin(t)\cos^2(t)\ dt$. Coupons l'intégrale en deux pour alléger un peu la rédaction : $F_1(x) = \displaystyle\int^x t\sin(t)\ dt = -t\cos(t) + \int^x \cos(t)\ dt = -x\cos(x) + \sin(x)$ par intégration par parties facile. Passons au deuxième morceau, où on va aussi pouvoir faire une IPP en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = -\sin(t)\cos^2(t)$, soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{3}\cos^3(t)$ (coup de pot, cette primitive !), ce qui donne $F_2(x) = \displaystyle\int^x -t\sin(t)\cos^2(t) = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \int^x \frac{1}{3}\cos^3(t)\ dt = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\int^x \cos(t)(1 -$

$\sin^2(t))\ dt = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\sin^3(x)$. Finalement, on trouve brillamment $F(x) = \frac{x}{3}\cos^3(x) - x\cos(x) + \frac{1}{9}\sin^3(x) + \frac{2}{3}\sin(x)$. Une autre méthode possible est la linéarisation : $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$, donc $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$, on peut ensuite effectuer une IPP sur chaque moitié (en dérivant le x à chaque fois) : $F(x) = \int^x \frac{3}{4}t\sin(t) - \frac{1}{4}t\sin(3t)\ dt = -\frac{3}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\int^x \cos(t)\ dt + \frac{1}{4}\frac{x\cos(3x)}{3} - \frac{1}{12}\int^x \cos(3t)\ dt = -\frac{3}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}x\cos(3x) - \frac{1}{36}\sin(3x)$.

- On ne se fatigue surtout pas, f est à peu près de la forme $u'\sqrt{u}$, qui a une primitive proportionnelle à $u^{\frac{3}{2}}$. Ici, on trouve donc directement $F(x) = \frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}$ (définie sur $\mathbb{R}$ tout comme f).
- On a vraiment très envie d'effectuer le changement de variables $u = \ln(t)$, ce qui donne $du = \frac{1}{t}dt$ (ça tombe bien, $\frac{1}{t}$ se met facilement en facteur dans l'intégrale) pour trouver $F(x) = \int^x \frac{1}{t(1+\ln^2(t))}\ dt = \int^{\ln(x)} \frac{1}{1+u^2}\ du = \arctan(\ln(x))$, valable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on pouvait bien sûr remarquer directement que la fonction f est la dérivée de la fonction obtenue).
- Effectons deux IPP successives en dérivant à chaque fois la fonction hyperbolique et en primitivant la fonction trigonométrique (on peut bien sûr faire le contraire, ça marche pareil) : $F(x) = \int^x \mathrm{ch}(t)\cos(t)\ dt = \mathrm{ch}(x)\sin(x) - \int^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)\ dx = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x) - \int^x \mathrm{ch}(t)\cos(t)\ dx = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x) - F(x)$. Du coup, $2F(x) = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x)$ et $F(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x))$.
- Une toute petite astuce suffit : $F(x) = \int^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\ dt = \int^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\ dt = x - \arctan(x)$.
- Ici, on peut au choix utiliser la même astuce que dans le calcul précédent (ce qui est sous l'intégrale s'écrit $\sqrt{t+1} - \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, et tout s'intègre directement), ou bien, pour mieux voir ce qui se passe, effectuer le petit changement de variable $u = t+1$: $\int^{x-1} \frac{t}{\sqrt{t+1}}\ dt = \int^{x-1} \frac{u-1}{\sqrt{u}}\ du = \int^{x-1} \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\ du = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}\right)\sqrt{x-1}$. Cette primitive est valable sur tout l'intervalle $]-1, +\infty[$.
- Encore un bon exemple d'IPP astucieuse, en posant $u(t) = \ln(1+t^2)$, soit $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve $F(x) = \int^x \ln(1+t^2)\ dt = x\ln(1+x^2) - \int^x \frac{2t^2}{1+t^2}\ dx = x\ln(1+x^2) - 2\int^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\ dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)$ (même astuce que la neuvième intégrale de ce même exercice pour la fin du calcul).
- À part une IPP, on ne voit pas bien quoi faire : posons $u(t) = \ln(t+\sqrt{t^2-1})$, soit $u'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}{t+\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$, et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve alors $F(x) = \int^x \ln(t+\sqrt{t^2-1})\ dt = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \int^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\ dt = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1}$, primitive valable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

Le corrigé continuera à être rédigé ligne par ligne.

- Un simple changement de variables $t = x + 1$ simplifie énormément le calcul : $I = \int_0^1 (x - 2)(x+1)^5\, dx = \int_1^2 (t-3)t^5\, dt = \int_1^2 t^6 - 3t^5\, dt = \left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{2}\right]_1^2 = \frac{127}{7} - \frac{63}{2} = -\frac{187}{14}$.

- Un simple enchaînement d'IPP suffit, en posant $u(x) = (\ln(x))^3$, soit $u'(x) = \frac{3(\ln(x))^2}{x}$, et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \frac{x^3}{3}$, ce qui donne $I = \int_1^e x^2(\ln(x))^3\, dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln(x))^3\right] - \int_1^e x^2(\ln(x))^2\, dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e x^2(\ln(x))^2\, dx$. On effectue une deuxième IPP en posant $u(x) = (\ln(x))^2$, soit $u'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$, et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \frac{x^3}{3}$, pour trouver $I = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)^2\right] + \int_1^e \frac{2x^2}{3}\ln(x) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln(x)\, dx$. Allez, une dernière IPP pour finir, en posant $u(x) = \ln(x)$, soit $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $v'(x) = x^2$, donc $v(x) = \frac{x^3}{3}$. On finit par obtenir $I = \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right] - \frac{2}{3}\int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{2e^3}{9} - \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} - \frac{2e^3-2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}$.

- On reconnait ici à très peu de choses près une forme $\frac{u'}{u}$ qui s'intègre directement (si vraiment on n'est pas réveillés, un petit changement de variables $t = e^{2x}$ permet aussi de se tirer d'affaire) : $I = \int_0^{\frac{\ln(2)}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2)\right]_0^{\frac{\ln(2)}{2}} = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(3)) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

- On peut s'en sortir rapidement en se souvenant que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$, d'où $I = \frac{1}{2}\int 0^{2\pi} \cos(2x) + 1\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x) + x\right]_0^{2\pi} = \pi$. Allez, une technique hyper astucieuse pour ceux qui aiment : on peut constater que $I = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx$ (intégrer le carré du cosinus ou du sinus sur une période donne la même chose), puis faire la somme des deux pour trouver $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x)\, dx = \int_0^{2\pi} 1\, dx = 2\pi$. Chacune des deux intégrales vaut donc π.

- On reconnait immédiatement $\frac{u'}{u^2}$ (ce n'est pas parce que le x est au dénominateur qu'il faut se laisser avoir), du coup $I = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_e^{e^2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ (au pire, le changement de variable $t = \ln(u)$ ramène au même calcul).

- On peut intégrer directement si on est un tout petit peu malin : $I = \int_0^1 \frac{x}{1+(x^2)^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\arctan(x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$.

- Parfois, la méthode bêtement bourrine est efficace, remplacer joyeusement tout par des exponentielles fonctionne. Commençons par calculer $\operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}^2(x) = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \times \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{4x} - 2 + e^{-4x}}{16}$, puis intégrons : $I = \frac{1}{16}\int_0^{\ln(2)} e^{4x} + e^{-4x} - 2\, dx = \frac{1}{16}\left[\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{4} - 2x\right]_0^{\ln(2)} =$

$\frac{1}{16}\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16\times 4}+\frac{1}{4}-2\ln(2)\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{1\ 024}-\frac{\ln(2)}{8}=\frac{255}{1\ 024}-\frac{\ln(2)}{8}$.

- Un exemple surprenant de double intégration par parties : on commence par poser $u(x)=\cos(x)$, donc $u'(x)=-\sin(x)$, et $v'(x)=v(x)=e^x$, pour trouver $I=[e^x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\ dx$, et on recommence, toujours avec $v'(x)=v(x)=e^x$, et $u(x)=\sin(x)$, donc $u'(x)=\cos(x)$. On a cette fois $I=-1+[e^x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\ dx=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-I$. Autrement dit, $2I=e^{\frac{\pi}{2}}-1$, et $I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$.
- De qui se moque-t-on dans cet exercice ? On a déjà fait la même en plus facile à la deuxième intégrale ! Au moins, ici, deux IPP suffiront, je ne détaille pas autant que la première fois, on dérive bien sûr toujours les puissances de ln pour intégrer les x : $I=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)^2\right]_1^e-\int_1^e x\ln(x)\ dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e+\int_1^e\frac{x}{2}\ dx=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2-1}{4}$.
- On aimerait bien faire une IPP mais une primitive de $\sin^2$, ce n'est pas forcément trivial à trouver. Soit on en trouve une quand même en pensant qu'il y a un lien entre $\sin^2(x)$ et $\cos(2x)$ (petit truc déjà exploité un peu plus haut), soit on utilise une astuce en posant $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2(x)\ dx$, et en calculant la somme et la différence de I et de J. Allez, faisons comme ça : $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x)+\cos^2(x))\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\ dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$. La différence demande plus de boulot : $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x)-\cos^2(x))\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-x^2\cos(2x)\ dx$. Il va falloir faire une double IPP, en dérivant à chaque fois les x et en primitivant les fonctions trigonométriques : $u(x)=x^2$ donc $u'(x)=2x$, et $v'(x)=\cos(2x)$, donc $v(x)=\frac{\sin(2x)}{2}$, pour trouver $I-J=\left[-\frac{x^2}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\ dx$. Il va évidemment falloir une deuxième IPP : $I-J=\left[-x\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2x)}{2}\ dx=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$. Ne reste plus qu'à écrire que $I=\frac{I+J}{2}+\frac{I-J}{2}=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$.
- Il est plus simple pour la rédaction de calculer par IPP $J=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\ dx$: on pose $u(x)=\frac{1}{1+x^2}$, soit $u'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, et $v'(x)=1$, donc $v(x)=x$. On trouve alors $J=\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1+\int_0^1\frac{2x^2}{(1+x^2)2}\ dx=\frac{1}{2}+2\int_0^1\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\ dx=\frac{1}{2}+2J-2I$. Autrement dit, $I=\frac{1}{2}J+\frac{1}{4}$. Or, on sait calculer directement $J=[\arctan(x)]_0^1=\frac{\pi}{4}$, dont on déduit $I=\frac{\pi+2}{8}$.
- Dans ce genre de cas, le changement de variable $t=1-x$ est le bienvenu (attention au changement de signe : $dt=-dx$) : $I=\int_1^0-(1-t)^2\sqrt{t}\ dt=\int_0^1(1-2t+t^2)\sqrt{t}\ dt=\int_0^1\sqrt{t}-2t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{5}{2}}\ dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{2}{7}=\frac{16}{105}$.
- On a sous l'intégrale une forme $u'u$, qui est à un facteur près la dérivée de u^2, on fait donc une intégration directe : $I=\left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e=\frac{1}{2}$.

- C'est la même que la précédente ! Ah non, zut, la racine carrée complique tout. Pas tant que ça en fait : $I = \int_1^e \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$. effectuons un changement de variable en posant $t = \sqrt{x}$, donc $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, pour trouver $I = \int_1^{\sqrt{e}} 4\ln(t)\ dt = 4[t\ln(t) - t]_1^{\sqrt{e}} = 4(\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) - \sqrt{e} + 1) = 4 - 2\sqrt{e}$.

- Empressons-nous de poser $t = x+1$ pour trouver $I = \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{\sqrt{t}}\ dt = \int_1^2 t^{\frac{5}{2}} - 3t^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = \left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right]_1^2 = \frac{2(8\sqrt{2}-1)}{7} - \frac{6(4\sqrt{2}-1)}{5} + 2(2\sqrt{2}-1) - 2\sqrt{2} + 2 = \left(\frac{16}{7} - \frac{24}{5} + 2\right)\sqrt{2} - \frac{2}{7} + \frac{6}{5} = \frac{32 - 18\sqrt{2}}{35}$

Exercice 3 (** à ***)

- Ici, les plus malins feront la décomposition en éléments simples à vue (même pas besoin d'identification) : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, donc $I = \int_2^3 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\ dx = [\ln(x) - \ln(x+1)]_2^3 = \ln(3) - \ln(4) - \ln(2) + \ln(3) = 2\ln(3) - 3\ln(2) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$.

- La décomposition en éléments simples va être de la forme $\frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-2}$. En multipliant par $x-2$ en en prenant $x=2$, on trouve $\frac{3}{5} = c$. En multipliant tout par x et en prenant la limite en $+\infty$, $0 = a + c$, donc $a = -\frac{3}{5}$. Pour achever le calcul, on regarde pour $x = 0$: $-\frac{1}{2} = b - \frac{c}{2}$, donc $b = \frac{c-1}{2} = -\frac{1}{5}$. Finalement, $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{5} \times \frac{1}{x-2} - \frac{3}{5}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{5(x^2+1)}\ dx = \left[\frac{3\ln(2-x)}{5} - \frac{3\ln(x^2+1)}{10}\ln(x^2+1) - \frac{\arctan(x)}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(2)\right) - \frac{3}{10}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}(2\ln(3) - 2\ln(2) - \ln(5)) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}\ln\left(\frac{9}{20}\right) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. On ne peut pas vraiment simplifier plus, notamment l'arctangente qui ne correspond pas le moins du monde à un angle remarquable.

- On revient à du plus facile : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, on peut décomposer sous la forme $\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$. En multipliant par $x-1$ puis par $x-3$, on trouve facilement $-\frac{1}{2} = b$ et $\frac{1}{2} = b$, donc $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(3-x) - \ln(1-x)]_{-1}^0 = \frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(4) + \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

- Comme on a déjà vu quasiment le même calcul en cours, je passe les détails : $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\ dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}\ dt = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}t)^2 + 1}\ dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} =$
$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

- Les primitives seront définies sur chacun des intervalles $]-\infty,2[$ et $]2,+\infty[$, on va déterminer une primitive définie sur le premier intervalle. On commence par une IPP en dérivant l'arctangente et en primitivant le facteur 1 : comme $x\mapsto\dfrac{x-1}{x-2}$ a pour dérivée $\dfrac{-1}{(x-2)^2}$, celle de $x\mapsto\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ vaut $\dfrac{-1}{(x-2)^2}\dfrac{1}{1+(\frac{x-1}{x-2})^2}=-\dfrac{1}{2x^2-6x+5}$. On trouve alors $F(x)=x\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)+\displaystyle\int^x\frac{t}{2t^2-6t+5}\,dt$. Le dénominateur de la nouvelle intégrale ne s'annule jamais, mais on peut écrire $\displaystyle\int^x\frac{t}{2t^2-6t+5}\,dt=\int^x\frac{1}{4}\frac{4t-6}{2t^2-6t+5}+\frac{3}{2}\frac{1}{2t^2-6t+5}\,dt=\frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5)+\int^x\frac{3}{4}\frac{1}{(t-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}}\,dt=\frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5)+\int^x\frac{3}{(2t-3)^2+1}\,dt=\frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5)+\frac{3}{2}\arctan(2x-3)$. Finalement, $F(x)=x\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)+\dfrac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5)+\dfrac{3}{2}\arctan(2x-3)$.

Exercice 4 (***)

1. Posons donc $u=\cos(t)$, ce qui transforme les bornes de notre intégrale en $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et en $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$, et surtout l'élément différentiel vérifie $du=-\sin(t)\,dt$. Au niveau de la rédaction, il est plus commode de multiplier en haut et en bas par $\sin(t)$ dans l'intégrale initiale pour faire apparaitre le changement d'élément différentiel : $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin(t)}\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1-\cos^2(t)}\times\sin(t)\,dt=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-u^2}\,du=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1-u^2}\,du$. Il reste une petite décomposition en éléments simples à effectuer : $\dfrac{1}{1-u^2}=\dfrac{1}{(1-u)(1+u)}=\dfrac{1-u+1+u}{2(1-u)(1+u)}=\dfrac{1}{2(1+u)}+\dfrac{1}{2(1-u)}$. On en déduit que $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\,du=\frac{1}{2}[\ln(1+u)-\ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)-\frac{\ln(3)}{2}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\ln(3)}{2}$ en se rendant compte que $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^2$ (multiplication par la quantité conjuguée).

   Pour les fans d'astuces bizarres, une façon rapide de calculer une primitive de $\dfrac{1}{\sin(t)}$ est de faire un changement de variable beaucoup plus anodin en posant $t=2u$: $\displaystyle\int\frac{1}{\sin(t)}\,dt=\int\frac{2}{\sin(2u)}\,du=\int\frac{1}{\sin(u)\cos(u)}\,du=\int\frac{1}{\tan(u)\cos^2(u)}\,du$, et on reconnait une forme $\dfrac{u'}{u}$ puisque la dérivée de la tangente est notamment égale à $\dfrac{1}{\cos^2}$. Du coup, $\displaystyle\int\frac{1}{\sin(t)}\,dt=\ln(|\tan(u)|)=\ln\left(\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right)$.

2. On commence donc par effectuer une IPP en posant $u'(x)=x$ et $u(x)=\dfrac{x^2}{2}$, et $v(x)=\arctan(x)$, soit $v'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. On obtient donc $I=\int_0^1 x\arctan(x)\,dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1-$

$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\ dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\ dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

3. Puisqu'on nous le propose, posons donc $t = \pi - x$, ce qui transforme les bornes de l'intégrale en π et 0 (autrement dit, on les échange) et l'élément différentiel en $dt = -dx$. Quitte à remettre les bornes dans le bon sens, on peut donc conserver bornes et élément différentiel identiques et ne modifier que ce qui se trouve sous l'intégrale. On sait que $\sin(x) = \sin(\pi - t) = \sin(t)$, et $\cos(x) = \cos(\pi - t) = -\cos(t)$, mais l'élévation au carré fait disparaitre ce changement de signe. On peut donc écrire $I = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\ dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\ dt = \pi \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\ dt - I$. Or l'intégrale restante se calcule très bien, elle vaut $[-\arctan(\cos(x))]_0^\pi = -\arctan(-1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$. On a donc $2I = \frac{\pi^2}{2}$, soit $I = \frac{\pi^2}{4}$.

4. Tentons donc une IPP en posant $u'(t) = 1$ (et donc par exemple $u(t) = t$), et $v(t) = \sin(\ln(t))$ qui implique $v'(t) = \frac{1}{t}\cos(\ln(t))$. En notant I l'intégrale à calculer, on a donc $I = [t\sin(\ln(t))]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(t))\ dt = -\int_1^{e\pi} \cos(\ln(t))\ dt$. On refait une IPP en posant toujours $u'(t) = 1$ et $u(t) = t$, et cette fois $v(t) = \cos(\ln(t))$, soit $v'(t) = -\frac{1}{t}\sin(\ln(t))$. On trouve alors $I = -[t\cos(\ln(t))]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} -\sin(\ln(t))\ dt = e^\pi + 1 - I$, donc $2I = e^\pi + 1$ et $I = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

   Autre méthode possible pour le calcul de I, un changement de variable $u = \ln(t)$ qui donne $dt = e^u\ du$ et $I = \int_0^\pi \sin(u)e^u\ du$, intégrale qui elle-même se calcule à l'aide d'une double IPP « circulaire ».

5. Commençons déjà par écrire $\tan(x) = \tan\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1-t^2}$. On en déduit que $1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}$. On sait bien que $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, donc on déduit du calcul précédent que $\cos^2(x) = \frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}$. Sur notre intervalle d'intégration, $t \in [0, 1]$, donc $1 - t^2 \geqslant 0$. De plus, $\cos(x)$ lui-même est positif entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc on peut écrire que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. On calcule enfin $\sin(x) = \tan(x)\cos(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

   Il est temps d'effectuer le changement de variable proposé pour ce calcul d'intégrale. On a donc $x = 2\arctan(t)$, soit $dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$, et les bornes deviennent 0 et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Autrement dit, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin(x)}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2+t}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\ dt = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2 + 1}\ dt = \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

   Ce changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ permet en fait de transformer n'importe quel quotient faisant intervenir des puissances du cosinus et du sinus en fraction rationnelle « ordinaire », mais la technique n'est pas au programme.

Exercice 5 (**)

1. La primitive qui s'annule en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est évidemment la fonction arctangente.

2. Cherchons donc à calculer $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$ en effectuant le changement de variable $t = \tan(u)$, ou si on préfère $u = \arctan(t)$. On aura bien sûr $du = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$, ce qui permet d'éliminer le carré dans l'intégrale, et les bornes d'intégration vont devenir 0 et $\arctan(x)$, pour donner $F_2(x) = \displaystyle\int_0^{\arctan(x)} \frac{1}{1+\tan^2(u)}\,du = \int_0^{\arctan(x)} \cos^2(u)\,du$ en exploitant les deux formes de la dérivée de la fonction tangente. Or, $\cos^2(u) = \dfrac{\cos(2u)+1}{2}$ à l'aide des formules de duplication du cosinus, donc $F_2(x) = \displaystyle\int_0^{\arctan(x)} \frac{\cos(2u)}{2} + \frac{1}{2}\,du = \frac{\sin(2\arctan(x))}{4} + \frac{\arctan(x)}{2}$. Reste à simplifier $\sin(2\arctan(x)) = 2\cos(\arctan(x))\sin(\arctan(x))$. On sait que $\cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (ce cosinus est toujours positif au vu des valeurs prises par la fonction arctangente), puis $\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) \times \cos(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Finalement, $\sin(2\arctan(x)) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, puis $F_2(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(x) + \dfrac{x}{2(1+x^2)}$.

3. Partons par exemple de $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$, et effectuons une intégration par parties en posant $u(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$, donc $u'(t) = \dfrac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$, et $v'(t) = 1$ qu'on intégrera en $v(t) = t$. On obtient alors $F_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(F_n(x) - F_{n+1}(x))$. Autrement dit, on a $2nF_{n+1}(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)F_n(x)$, soit $F_{n+1}(x) = \dfrac{x}{2n(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}F_n(x)$.

4. En particulier, en prenant $n = 2$, $F_3(x) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{x}{(1+x^2)^2} + \dfrac{3}{4}F_2(x) = \dfrac{3}{8}\arctan(x) + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ (on peut regrouper les deux termes si on le souhaite).

Exercice 6 (***)

1. Cette équation ne peut évidemment avoir de sens que si $\cos(x) \neq 0$ (pour que la tangente soit définie), on peut l'écrire sous la forme $2\cos(x) + \dfrac{3\sin(x)}{\cos(x)} = 0$ puis, après avoir multiplié par $\cos(x)$, sous la forme $2\cos^2(x) + 3\sin(x) = 0$, ou encore $2 - 2\sin^2(x) + 3\sin(x) = 0$. On pose maintenant $X = \sin(x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $-2X^2 + 3X + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{-3-5}{-4} = 2$ et $X_2 = \dfrac{-3+5}{-4} = -\dfrac{1}{2}$. La condition $\sin(x) = 2$ n'étant jamais vérifiée, les seuls angles solutions sont ceux pour lesquels $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$, soit $x \equiv -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$. On en déduit immédiatement que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ 2k\pi - \dfrac{\pi}{6}, 2k\pi - \dfrac{5\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ (en fait, il faut aussi enlever du

domaine de définition les nombres de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour lesquels la tangente n'est pas définie). L'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ne contenant aucune valeur interdite, la fonction f y est continue, et l'intégrale I est donc correctement définie.

2. Faisons donc ce qu'on nous conseille. Si on pose $t = \sin(x)$, on aura $dt = \cos(x)\ dx$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\cos(x)$, on fait naturellement apparaitre sous notre intégrale un $\cos(x)\ dx$ qu'on peut directement remplacer par dt. Reste alors sous l'intégrale l'expression $\frac{1 - 2\sin(x)}{2\cos^2(x) + 3\tan(x)\cos(x)} = \frac{1 - 2t}{2(1 - t^2) + 3t}$, ce qui correspond bien à la formule annoncée par l'énoncé. Il ne reste plus qu'à modifier les bornes de l'intégrale : 0 devient $\sin(0) = 0$ et $\frac{\pi}{6}$ devient $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. On trouve donc $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2t}{2 - 2t^2 + 3t}\ dt.$
3. Le calcul effectué à la toute première question prouve que le dénominateur de cette fraction se factorise sous la forme $(2 + 3t - 2t^2) = (2 - t)(2t + 1)$ (attention tout de même à ne pas oublier le coefficient dominant égal à 2 et à ne pas faire d'erreur de signe). On peut donc décomposer la fraction sous la forme $\frac{1 - 2t}{2 + 3t - 2t^2} = \frac{a}{2 - t} + \frac{b}{2t + 1}$. En multipliant l'égalité par $2 - t$ puis en posant $t = 2$, on trouve $a = -\frac{3}{5}$. De même, en multipliant par $2t + 1$ puis en posant $t = -\frac{1}{2}$, on aura $b = \frac{4}{5}$. On conclut : $\frac{1 - 2t}{2 + 3t - 2t^2} = \frac{3}{5(t - 2)} + \frac{4}{5(2t + 1)}$.
4. On peut maintenant calculer facilement $I = \frac{3}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t - 2}\ dt + \frac{2}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2t + 1}\ dt = \frac{3}{5}[\ln(2 - t)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}[\ln(2t + 1)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{5}\ln(2) + \frac{2}{5}\ln(2) = \frac{3\ln(3) - 4\ln(2)}{5}$.
5. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, le cosinus et la tangente sont tous les deux strictement positifs, et le sinus est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, donc $1 - 2\sin(x) \geqslant 0$. On intègre donc une fonction toujours positive, l'intégrale doit être positive. C'est bien le cas : $3\ln(3) - 4\ln(2) \simeq 3.3 - 2.8 > 0$, donc $I > 0$.

Exercice 7 (***)

1. Posons donc $z(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, et dérivons z : $z'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0$. La fonction z est constante sur $]0, +\infty[$, de valeur égale à $f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
2. (a) Je ne ferai même pas de dessin clair : par définition, $\int_0^x f(t)\ dt$ est l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et la droite verticale située à l'abscisse x. De même, $\int_0^{f(x)} g(t)\ dt$ est l'aire située entre la courbe de g etc. Mais on sait bien que la courbe de g est symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. Quitte à inverser le rôle des deux axes, on peut donc visualiser la courbe de g dans le même repère que celle de f, et la deuxième intégrale correspond alors exactement à l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des ordonnées et la droite horizontale située à ordonnée $f(x)$. Quand on additionne les deux aires, on obtient exactement l'aire du rectangle constitué par les deux axes et les deux droites (l'une verticale, l'autre horizontale) précédemment décrites. Ce rectangle est de largeur x et de hauteur $f(x)$, il a donc pour aire $xf(x)$, ce qui prouve notre formule.

(b) Par définition, $\int_0^x f(t)\ dt + \int_0^{f(x)} g(t)\ dt = F(x) + G(f(x))$ (on prend les primitives s'annulant en 0 pour simplifier le calcul).

(c) Pour faire réapparaitre les fonctions f et g, dérivons donc $H(x) = F(x) + G(f(x))$, on obtient $H'(x) = f(x) + f'(x)g(f(x)) = f(x) + xf'(x)$ puisque, par définition de la réciproque, $g(f(x)) = x$. Or, la formule obtenue pour $H'(x)$ est la même que celle de la dérivée de $xf(x)$. On en déduit que $H(x) = xf(x) + k$. Reste à constater que $H(0) = F(0) + G(f(0)) = F(0) + G(0) = 0$ (puisque les primitives s'annulent en 0) pour conclure que $H(x) = xf(x)$.

3. (a) On peut effectuer la division euclidienne, ou procéder par identification : $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(ax^2+bx+c) = ax^4+(\sqrt{2}a+b)x^3+(a+b\sqrt{2}+c)x^2+(b+c\sqrt{2})x+c$. Par identification, on doit donc avoir $a = 1$; $\sqrt{2}a + b = 0$, soit $b = -\sqrt{2}$; $a + b\sqrt{2} + c = 0$, soit $c = -1 + 2 = 1$; $b + c\sqrt{2} = 0$ ce qui est vrai ; et $c = 1$ ce qui est vrai aussi. Finalement, $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

(b) Comme il n'y a pas de racines pour le dénominateur, le plus rapide est sûrement de faire une identification, ou d'être astucieux ! Constatons par exemple que $\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1 - x^2 + \sqrt{2}x - 1}{x^4 + 1} = \frac{2\sqrt{2}x}{x^4 + 1}$. Il suffit de tout multiplier par $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ pour obtenir $\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{x}{2\sqrt{2}(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} - \frac{x}{2\sqrt{2}(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$. Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, $b = d = 0$, et $c = -a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) Calculons donc $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\ dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)]_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\ dx = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}))^2 + 1}\ dx = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x - 1)\right]_0^1 = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{4}$.

On fait le même calcul (ou presque) pour la deuxième moitié : $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1)]_0^1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\ dx = \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} - [\arctan(\sqrt{2}x + 1)]_0^1 = \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} - \arctan(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}$.

On regroupe maintenant les deux résultats pour obtenir

$$J = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) - \frac{\pi}{4}\right).$$

Or, $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ (en multipliant par la quantité conjuguée), donc $\arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan(1 + \sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\ln(2 + \sqrt{2}) - \ln(2 - \sqrt{2}) = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{6 + 4\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(3 + 2\sqrt{2})$. En regroupant tout, on obtient finalement (ouf !) : $J = \frac{\pi - \ln(3 + 2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}$.

4. La fonction tangente étant continue strictement croissante et positive sur l'intervalle considéré, f aussi, et elle est donc bijective vers $[0, 1]$ (puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = \sqrt{1} = 1$). Si $y = \sqrt{\tan(x)}$, alors $x = \arctan(y^2)$, donc $g(x) = \arctan(x^2)$ (même pas de piège !).

5. On souhaite donc calculer $\int_0^1 \arctan(x^2)\, dx$. Procédons par IPP en posant $u(x) = \arctan(x^2)$, donc $u'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$, et $v'(x) = 1$ qui donne $v(x) = x$. On obtient alors $\int_0^1 g(x)\, dx = [x\arctan(x^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi - \ln(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + \pi(1-\sqrt{2})}{4}$ (on a utilisé le résultat du calcul de J).

Il ne reste plus, en appliquant la question 2 avec $x = \frac{\pi}{4}$, qu'à constater que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\, dt + \int_0^1 g(t)\, dt = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, donc $I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 g(t)\, dt = 2J = \frac{\pi - \ln(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$.