Feuille d'exercices n° 13 : corrigé

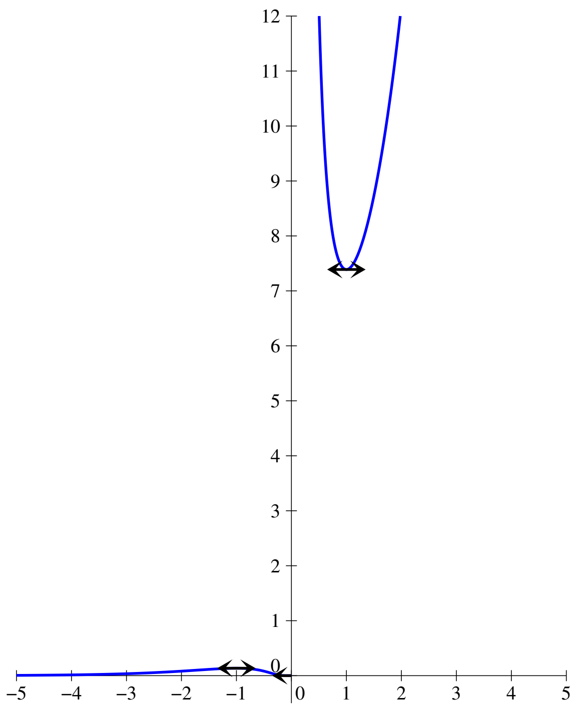
MPSI Lycée Camille Jullian

27 janvier 2026

Exercice 1 (* à **)

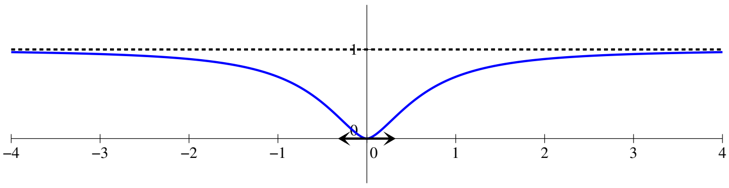
- La fonction f_1 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x+\frac{1}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = +\infty$. De même, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x+\frac{1}{x} = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = 0$. On peut prolonger la fonction f_1 seulement par continuité à gauche en 0, en posant $f_1(0) = 0$. Dérivons désormais : $f_1'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2} e^{x+\frac{1}{x}}$. Commençons par constater que $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f_1'(x) = 0$ (par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0$, et il ne reste ensuite qu'un facteur $\dfrac{x-1}{x+1} e^x$ qui tend vers 1), donc d'après le théorème du prolongement de la dérivée, f_1 est dérivable à gauche en 0 et sa courbe représentative y admet une tangente horizontale. Pour les plus courageux, on peut calculer $f_1''(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{x+\frac{1}{x}} + \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2 e^{x+\frac{1}{x}} = \dfrac{1+2x-2x^2+x^4}{x^4} e^{x+\frac{1}{x}}$, mais ça ne sert pas à grand chose puisqu'on n'arrivera pas à déterminer les racines du numérateur pour en déduire la convexité. Les variations sont par contre faciles à étudier, on peut calculer les valeurs des extrema locaux : $f_1(-1) = e^{-1-1} = \dfrac{1}{e^2}$, et $f_1(1) = e^2$. On peut dresser le tableau de variations suivant (les limites aux infinis ne posent aucun problème) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$0 \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

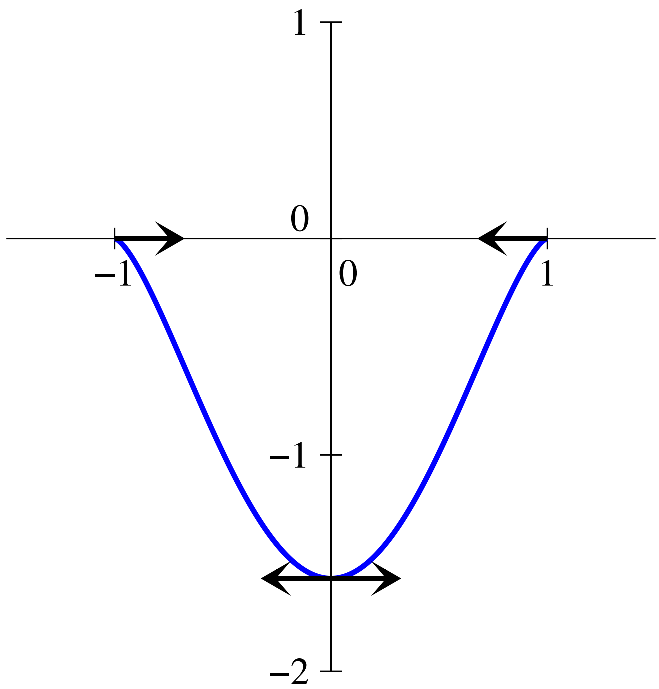


- La fonction f_2 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (ce qui est dans le ln étant toujours strictement positif). Elle est de plus manifestement paire et accessoirement à valeurs positives. En posant $X = \dfrac{1}{x^2}$, qui a pour limite 0 quand x se rapproche des infinis, et en utilisant la limite classique $\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{x} = 1$, on obtient que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. En 0, écrivons plutôt que $f_2(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) = x^2\ln(x^2+1) - x^2\ln(x^2)$ (expression qui est définie sur $\mathbb{R}^*$ comme $f(x)$). Le premier terme a pour limite 0, le deuxième aussi (par croissance comparée), donc on peut prolonger f_2 par continuité en 0 en posant $f_2(0) = 0$. Passons à la dérivée : $f_2'(x) = 2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) + x^2 \times \dfrac{-2}{x^3} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 2x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+1}\right)$. Pas de problème pour la limite en 0, la même technique que tout à l'heure (pour le produit de $2x$ par le ln, l'autre morceau tendant facilement vers 0) permet de prouver que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_2'(x) = 0$, donc par théorème du prolongement de la dérivée (je me dispenserai de le citer pour les fonctions suivantes), la fonction f_2 est dérivable en 0, et $f_2'(0) = 0$. Pour les variations, ce n'est pas si simple, sur $\mathbb{R}^+$, la dérivée est du signe de $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+1}$. La dérivée de cette fonction g vaut $g'(x) = -\dfrac{2}{x(1+x^2)} + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x^2 - 2(1+x^2)}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{-2}{x(1+x^2)^2}$. La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, de limite nulle en $+\infty$, donc elle est positive sur $]0;+\infty[$. La fonction f_2 est donc croissante sur $[0,+\infty[$, et par parité, décroissante sur $]-\infty,0]$. Résumons nos différents calculs dans un tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f_2	1 ↘	0	↗ 1

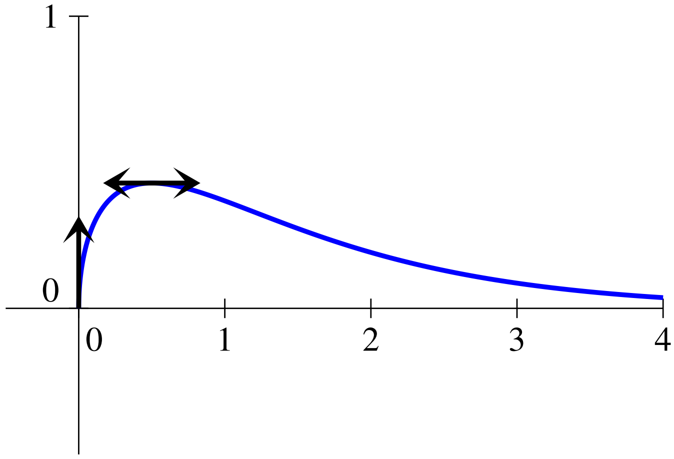


- La fonction f_3 est définie sur $[-1, 1]$ (puisqu'il faut avoir $-1 \leqslant x^2 \leqslant 1$ pour que l'arccos soit défini), mais a priori $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $]-1, 1[$. La fonction est de plus paire. Pas de prolongement par continuité à étudier (ni de limites pour f_3, contentons-nous de signaler que $f_3(-1) = f_3(1) = 0$). Passons donc tout de suite au calcul de la dérivée : $f_3'(x) = 2x \arccos(x^2) + (x^2-1) \times \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = 2x\left(\arccos(x^2) + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Cette dérivée est facilement positive sur $[0, 1]$, et la fonction est dérivable en 1, avec $f_3'(1) = 2(\arccos(1) + \sqrt{0}) = 0$. La fonction admet par ailleurs un minimum en 0, de valeur $f_3(0) = -\arccos(0) = -\dfrac{\pi}{2}$. Une allure de la courbe :

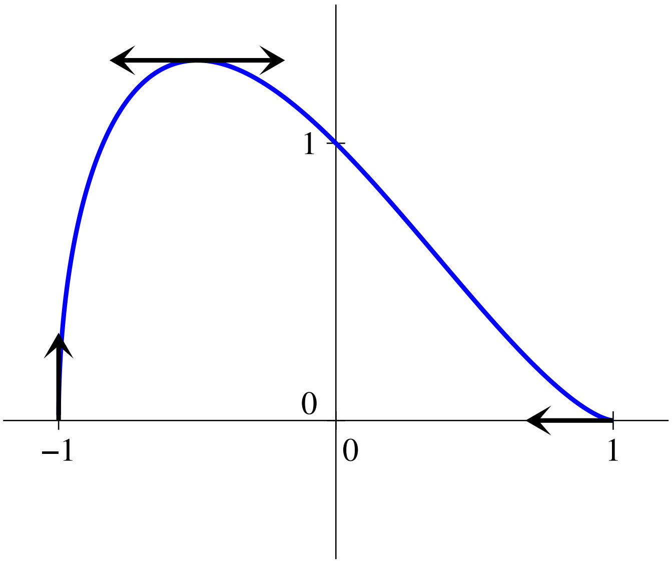


- La fonction f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ (à cause de la racine carrée). Calculons la dérivée : $f_4'(x) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{-x} = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$. En 0, cette dérivée a une limite infinie, la fonction f_4 n'est donc pas dérivable, mais la courbe admet en 0 une tangente verticale. La fonction est par ailleurs croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante ensuite, avec pour maximum $f_4\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$. Si on est courageux, on peut enchaîner sur le calcul de la dérivée seconde pour étudier la convexité : $f_4''(x) = \left(-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^{-x} = \dfrac{4x^2-4x-1}{4x\sqrt{x}}e^{-x}$. Cette dérivée seconde est du signe de $4x^2 - 4x - 1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 + 16 = 32$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{4+\sqrt{32}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, et

$x_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$. La courbe changera donc de concavité au point d'abscisse $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ (et d'ordonnée $\sqrt{x_1}e^{-x_1}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, je ne parle même pas de la tangente dont la pente sera horrible). Ce point n'est pas indiqué sur la courbe qui suit (par souci de lisibilité) :

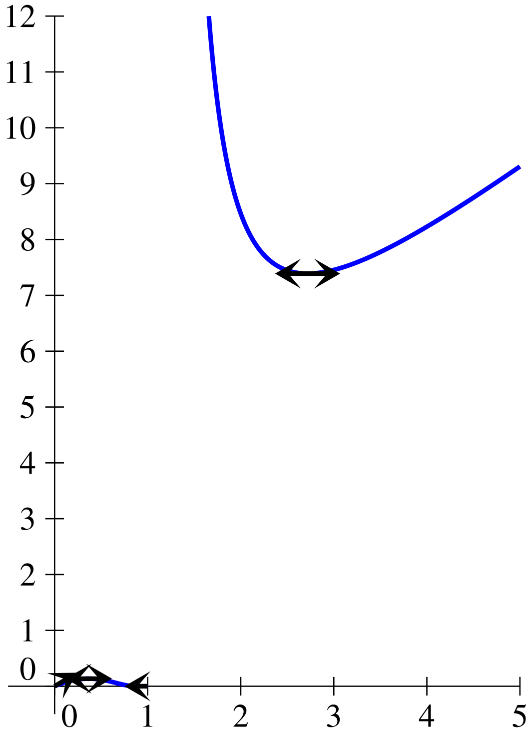


- La fonction f_5 est définie et continue sur $[-1,1]$, mais a priori $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $]-1,1[$. Pour changer, dérivons : $f_5'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-(1-x^2) - x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = -(2x+1)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. En -1, cette expression a une limite infinie, il y aura une tangente verticale ; par contre en 1, la limite est nulle, la fonction est donc dérivable en 1 et $f_5'(x) = 0$. Par ailleurs, la fonction est croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, et décroissante ensuite. Elle admet pour maximum $f_5\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. On peut enchaîner sur la dérivée seconde : $f_5''(x) = \dfrac{-2\sqrt{1-x^2} + \frac{(2x+1)\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$
$= \dfrac{-4(1-x^2) + (2x+1)(1+x) + (2x+1)(1-x)}{2(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2+2x-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, qui est du signe de $2x^2+2x-1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4+8 = 12$, et s'annule donc en $x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{12}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, qui n'appartient pas à l'intervalle $[-1,1]$. Il y donc un seul point de changement de concavité pour la courbe :

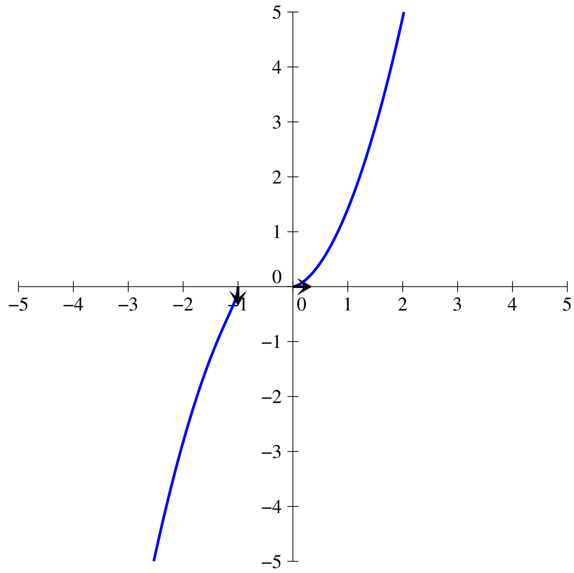


- La fonction f_6 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{\ln(x)}} = 1$, on peut prolonger f_6 par continuité en 0 en posant $f_6(0) = 0$. En 1, on calcule sans difficulté $\lim\limits_{x\to 1^-} f_6(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f_6(x) = +\infty$. On peut donc prolonger par continuité à gauche en 1 en posant $f_6(1) = 0$, mais pas à droite. Passons à la dérivée : $f_6'(x) = \left(1 - \dfrac{x}{x\ln^2(x)}\right) e^{\frac{1}{\ln(x)}} = \dfrac{\ln^2(x) - 1}{\ln^2(x)} e^{\frac{1}{\ln(x)}}$. En 1, cette dérivée a la même limite que $-X^2 e^X$, où on a posé $X = \dfrac{1}{\ln(x)}$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} X = -\infty$, on en déduit par croissance comparée que $\lim\limits_{x\to 1^-} f_6'(x) = 0$. La fonction admet donc en 1 une demi-tangente horizontale. En 0, la dérivée a pour limite évidente 1 (on factorise le quotient par $\ln^2(x)$ si on y tient vraiment), donc f_6 est aussi dérivable en 0, et $f_6'(0) = 1$. Le signe de la dérivée est par ailleurs celui de $\ln^2(x) - 1 = (\ln(x)+1)(\ln(x)-1)$, qui s'annule en e et en $\dfrac{1}{e}$. On calcule $f_6(e) = e \times e^1 = e^2$, et $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \times e^{-1} = \dfrac{1}{e^2}$. On peut résumer toutes ces informations dans le tableau de variations suivant :

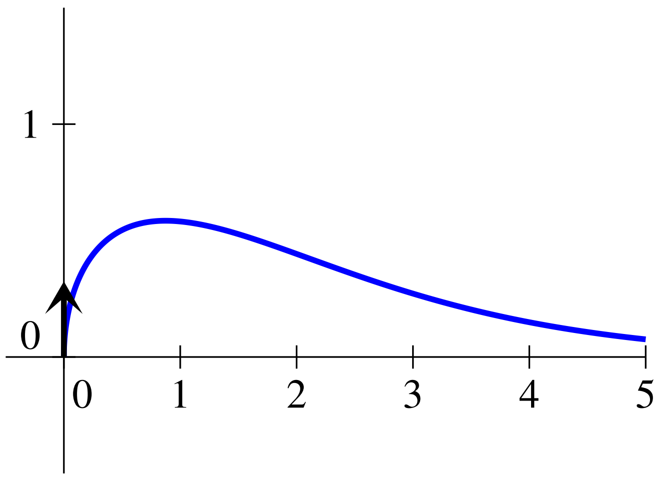
x	0		$\frac{1}{e}$		1		e		$+\infty$
f_6	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	e^2	↗	$+\infty$



- La fonction f_7 est définie et continue sur $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$ mais $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ a priori. On peut ici calculer directement $f_7'(x)=\sqrt{x+x^2}+\dfrac{x(1+2x)}{2\sqrt{x+x^2}}=\dfrac{2x+2x^2+x+2x^2}{2\sqrt{x+x^2}}=\dfrac{3x+4x^2}{2\sqrt{x+x^2}}=\dfrac{(3+4x)\sqrt{x}}{2\sqrt{1+x}}$ si $x\geqslant 0$. Sur l'autre intervalle, $f_7'(x)=\dfrac{(3+4x)\sqrt{-x}}{-2\sqrt{-1-x}}$. En tout cas, on a une limite infinie, donc une tangente verticale, en -1, et une limite nulle en 0, où la fonction est donc dérivable avec une tangente horizontale. La dérivée est par ailleurs positive sur chacun des deux intervalles où f_7 est définie. Une allure de courbe :

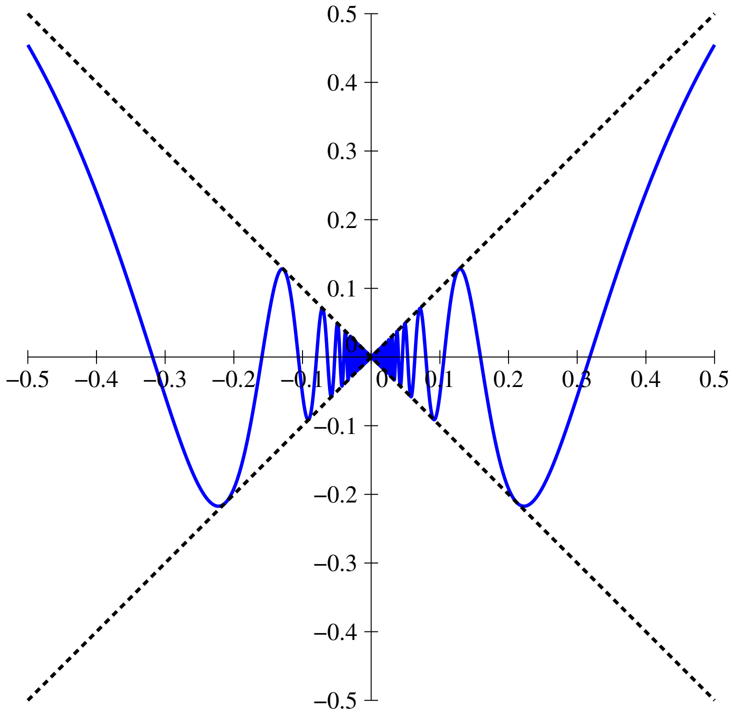


- La fonction f_8 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, en utilisant le fait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (limite classique), on obtient $\lim\limits_{x\to 0}f_8(x)=0$, et on peut prolonger f_8 par continuité en 0 en posant $f_8(0) = 0$. Passons au calcul de la dérivée, pour laquelle on posera au numérateur $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ pour se simplifier la vie : $f_8'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(e^x - 1) - x^{\frac{3}{2}} e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{\sqrt{x}(3e^x - 3 - 2xe^x)}{2(e^x - 1)^2}$. Le calcul de la limite de la dérivée en 0 n'est vraiment pas naturel avec les moyens dont nous disposons actuellement, mais on peut quand même s'en sortir : $f_8'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x}(e^x - 1)} \times \dfrac{x}{e^x - 1} \times \left(\dfrac{3(e^x - 1)}{x} - 2e^x\right)$ (vérifiez, je n'ai rien ajouté !), le dernier morceau dans la parenthèse tend vers 1 en utilisant la limite classique déjà exploitée plus haut, le deuxième quotient juste devant aussi, et le premier, à cause du $\sqrt{x}$ au dénominateur, a une limite infinie en 0. La fonction n'est donc pas dérivable en 0, sa courbe y admet une tangente verticale. Le signe de $3e^x - 3 - 2xe^x$ n'a par ailleurs hélas rien d'évident, si on dérive on trouve du $3e^x - 2e^x - 2xe^x = e^x(1 - 2x)$. Notre expression est donc croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante ensuite, vaut 0 en 0 et a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. Elle s'annule donc une fois, pour une valeur de x supérieure à $\dfrac{1}{2}$ et légèrement inférieure à 1 puisque $3e - 3 - 2e = e - 3 < 0$. On ne cherchera pas à en savoir plus, ni à calculer la dérivée seconde de f_8. Notons simplement que la croissance comparée permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_8(x) = 0$, et traçons une allure de courbe :



- Pour continuer en beauté, plein de fonctions d'un coup. Il était sous-entendu dans l'énoncé que n désignait un entier naturel, les fonctions sont donc toutes définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Si $n = 0$, la fonction n'a pas de limite en 0, on peut trouver facilement deux suites de réels tendant vers 0 mais dont la limite des images par f_0 est différente. Par exemple $f_0\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = \sin(2n\pi) = 0$ mais $f_0\left(\dfrac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})}\right) = \sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, la fonction f_0 n'a pas de limite en 0. Toutes les autres fonctions sont par contre prolongeables par continuité en posant $f_n(0) = 0$, car on peut écrire l'encadrement $-x^n \leqslant x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x^n$, qui suffit à assurer que $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$.

  Passons à la dérivée (si $n \neq 0$) : $f_n'(x) = nx^{n-1} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^n \times \dfrac{-1}{x^2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = nx^{n-1} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^{n-2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. À partir de $n = 3$, pas de problème, tout cela va gentiment tendre vers 0 en faisant un petit encadrement, donc les fonctions f_n sont alors dérivables (avec une tangente horizontale) en 0. Pour $n = 2$, le premier terme tend vers 0 mais le deuxième n'a pas de limite (même raison que ci-dessus), la fonction n'est pas dérivable. Enfin, si $n = 1$, la dérivée vaut $\sin(X) - X\cos(X)$, où on a posé $X = \dfrac{1}{x}$. Là encore, il n'est pas difficile de construire des suites donnant des limites différentes pour cette expression en 0, donc la fonction n'est pas dérivable non plus. Ici, chercher à calculer la dérivée seconde ou même à étudier les variations n'a à peu près aucun intérêt. Pour information, voici une allure de la courbe de $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ aux alentours de 0 (avec en pointillés les deux bissectrices entre lesquelles se trouve la courbe) :



- Essayons d'organiser un peu notre étude :
  — **domaine de définition** : on doit déjà avoir $x \in [-1, 1]$ pour que $1 - x^2$ soit positif et donc que la racine carrée intérieure existe. Ensuite, il faut en plus que $1 - 2x\sqrt{1 - x^2}$ soit positif, donc que $2x\sqrt{1 - x^2} \leqslant 1$. Cette condition est évidemment vérifiée lorsque $x < 0$, reste à gérer le cas des valeurs de x entre 0 et 1. Dans ce cas, on peut élever au carré : $2x\sqrt{1 - x^2} \leqslant 1$ si $4x^2(1 - x^2) \leqslant 1$, donc $4x^4 - 4x^2 + 1 \geqslant 0$. Or, $4x^4 - 4x^2 + 1 = (2x^2 - 1)^2$ est toujours positif, ce qui prouve qu'en fait $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$.
  — **domaine de dérivabilité** : f_{42} ne sera pas dérivable aux points qui annulent l'une des racines carrées qui la composent. Ainsi, f_{42} ne sera pas dérivable en 1 ni en -1 à cause de la présence du terme $\sqrt{1 - x^2}$. De plus, la racine carrée globale s'annule lorsque $x \geqslant 0$ et $2x^2 - 1 = 0$, donc pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
  — **étude des variations** : posons $g(x) = 1 - 2x\sqrt{1 - x^2}$, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur son domaine de définition, f_{42} aura les mêmes variations que g. La fonction g est dérivable sur $]-1, 1[$, et $g'(x) = -2\sqrt{1 - x^2} - 2x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{2x^2 - 2(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{2(2x^2 - 1)}{\sqrt{1 - x^2}}$. Notre dérivée est donc du signe de $2x^2 - 1$, c'est-à-dire qu'elle est négative sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et positive le reste du temps. On sait déjà que le minimum de f_{42} en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ vaut 0 (et que f_{42} ne sera pas dérivable à cet endroit), le maximum

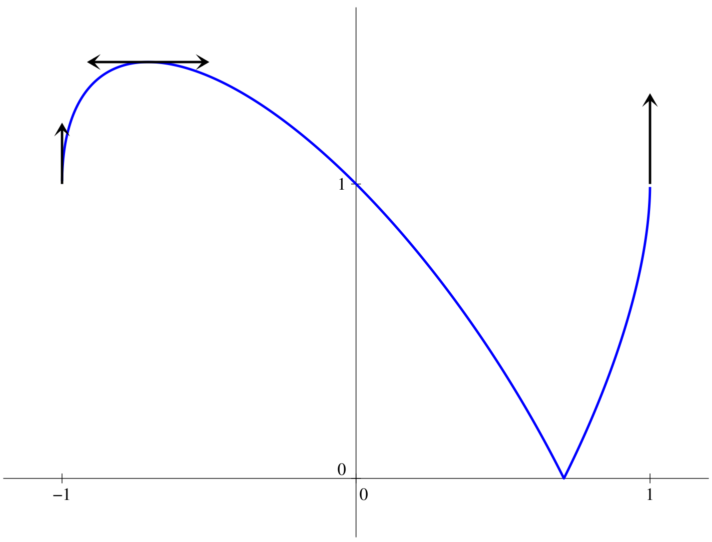
de l'autre côté vaut $f_{42}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{1+\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

— **calcul de valeurs supplémentaires** : on peut ajouter $f_{42}(0) = 1$, et bien sûr $f_{42}(-1) = f_{42}(1) = 1$.

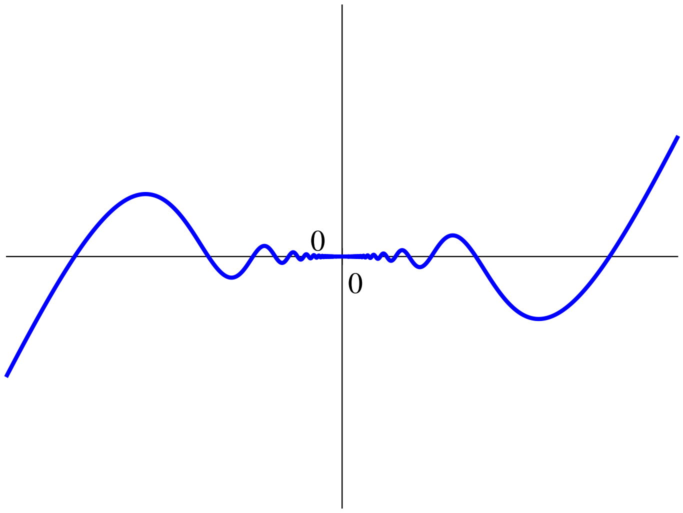
— **tangentes en** 1 **et en** -1 : comme on a $f'_{42}(x) = \dfrac{g'(x)}{2f_{42}(x)}$, on constate facilement que $\lim\limits_{x \to \pm 1} f'_{42}(x) = +\infty$, ce qui prouve que la courbe représentative de f_{42} admettra des tangentes verticales en 1 et en -1. Pour la valeur $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ où f_{42} n'est pas non plus dérivable a priori, calculer la limite de f'_{42} est beaucoup plus compliqué car à la fois f_{42} et g' s'annulent, et on a aucun moyen simple de déterminer la limite du quotient, on admettra donc que la courbe aura une forme « en pointe » à cet endroit-là.

— **étude de la convexité** : hum, non, en fait, ça va être vraiment trop affreux, on ne peut pas se contenter de calculer g'' et même ce calcul-là serait assez désagréable. On constatera sur la courbe ci-dessous que la fonction est en fait concave sur $\left[-1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, puis convexe sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$.

— **courbe** : finalement, seules les variations étaient vraiment à étudier en détail avant de tracer la courbe :



- C'est le genre de fonction qu'on ne cherchera pas à étudier ailleurs qu'en 0. La fonction f_{10} est toutefois $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes généraux. En 0, il suffit d'écrire que $-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ pour constater que le théorème des gendarmes assure la continuité de la fonction. Mais en fait, elle y est même dérivable en utlisant quasiment le même argument : $\tau_{0,f}(h) = \dfrac{f_{10}(h)}{h} = h \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donc on a l'encadrement $-h \leqslant \tau_{0,f}(h) \leqslant h$ qui suffit à assurer la dérivabilité de f_{10} en 0, avec $f'_{10}(0) = 0$. Une allure de courbe tracée bien entendu par ordinateur (comme toutes les précédentes), et sur laquelle on ne voit d'ailleurs pas grand chose malgré le zoom qui a été effectué sur la zone qui nous intéresse (valeurs de x comprises entre -0.4 et 0.4, de y comprises entre -0.2 et 0.2, théoriquement on a bien sûr une infinité de micro-sinusoïdes d'amplitude de plus en plus faible au voisinage de 0) :



Exercice 2 (*)

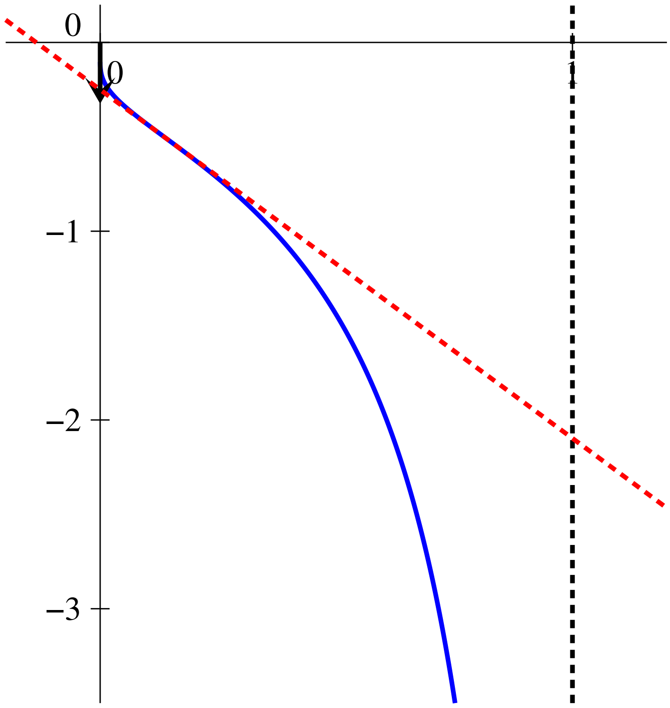
La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, de dérivée donnée par $f'(x) = \dfrac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln^2(1+bx)} = \dfrac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)\ln^2(1+bx)}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, qu'on va noter $g(x)$. La fonction g est elle-même dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $g'(x) = ab\ln(1+bx) + ab - ba\ln(1+ax) - ba = ab(\ln(1+bx) - \ln(1+ax)) > 0$ puisqu'on a supposé $a < b$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ (les ln ont tous les deux une limite nulle), ce qui prouve que la fonction g est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc que f est strictement croissante.

Exercice 3 (*)

La fonction f est bien sûr de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty$, pas de prolongement par continuité envisageable de ce côté. Par contre, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$, donc on peut prolonger f en une fonction continue sur $[0,1[$ en posant $f(0) = 0$ (on continuera de noter abusivement f le prolongement). On aura alors $\tau_{0,f}(h) = \dfrac{1}{h\ln(h)}$. Or, $\lim\limits_{h\to 0^+} h\ln(h) = 0^-$ (croissance comparée), ce qui prouve que $\lim\limits_{h\to 0^+} \tau_{0,f}(h) = -\infty$ et que f n'est donc pas dérivable en 0. Sa courbe représentative y dmettra toutefois une tangente verticale.

Il est temps d'étudier les variations de f : $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x\ln^2(x)} < 0$, donc f est bêtement décroissante sur tout l'intervalle. Passons donc à l'étude de convexité : $\forall x \in]0,1[$, $f''(x) = \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{x^2\ln^4(x)} = \dfrac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)}$. Le dénominateur de cette dérivée seconde est toujours négatif sur $]0,1[$, et le numérateur s'annule lorsque $\ln(x) = -2$, donc en $\dfrac{1}{e^2}$. Plus précisément, f sera convexe sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{e^2}\right[$, puis concave sur $\left]\dfrac{1}{e^2}, 1\right[$. On aura donc un seul point d'inflexion. Calculons $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, et $f'\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -\dfrac{e^2}{4}$, l'équation de la tangente au point d'inflexion est donc

$y = -\dfrac{e^2}{4}\left(x - \dfrac{1}{e^2}\right) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{e^2}{4}x - \dfrac{1}{4}$. Ci-dessous une allure de la courbe (la tangente au point d'inflexion en pointillés rouges) :



Exercice 4 (**)

Par un calcul direct, on trouve $f'(x) = 2nx^{2n-1}$, puis $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$, jusqu'à $f^{(n)}(x) = 2n(2n-1)\dots(n+1)x^n = \dfrac{(2n)!}{n!}x^n$ (si on tient vraiment à faire une récurrence pour être ultra rigoureux, on peut). Autre méthode, on écrit $f(x) = g(x) \times g(x)$, où $g(x) = x^n$. Par la formule de Leibniz, $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$. Or, par un calcul extrêmement similaire à celui des dérivées successives de f, $g^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. On peut donc en déduire que $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \times \frac{n!}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!^2}{k!(n-k)!}x^n = n!\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^n$. En comparant avec la première expression obtenue, on peut identifier : $n!\sum k = 0^n \binom{n}{k}^2 = \dfrac{(2n)!}{n!}$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \binom{2n}{n}$ (et pour vous entrainer, à la maison, vous redémontrerez cette égalité par récurrence, ce qui est loin d'être trivial).

Exercice 5 (*)

Cherchons donc si le taux d'accroissement de g en a admet une limite : $\dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} = \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = \dfrac{|f(a+h)|^2 - |f(a)|^2}{h(|f(a)| + |f(a+h)|)}$. En écrivant les carrés des modules sous la forme du produit par le conjugué, $|f(a+h)|^2-|f(a)|^2 = f(a+h)\overline{f(a+h)}-f(a)\overline{f(a)} = (f(a+h)-f(a))\overline{f(a+h)}+f(a)(\overline{f(a+h)-f(a)})$. En utilisant le fait que $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ (et similairement avec le conjugué), on trouve donc $\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{f'(a)\overline{f(a)}+f(a)\overline{f'(a)}}{|f(a)|^2} = \frac{2\text{Re }(f(a)f'(a))}{|f(a)|^2}$. La fonction g est donc dérivable si $f'(a) \neq 0$, et on peut alors dire que $g'(a) = \frac{2\text{Re }(f(a)f'(a))}{|f(a)|^2}$.

Exercice 6 (**)

1. La fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $]0, a]$. Par ailleurs, puisque $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$, on peut prolonger g par continuité en une fonction continue sur $[0, a]$ en posant $g(0) = 0$. Comme $g(a) = \frac{f(a)}{a} = 0$, la fonction g vérifie toutes les hypothèses du théorème de Rolle, et sa dérivée g' s'annule donc (au moins) une fois sur $]0, a[$.
2. La dérivée de la fonction g se calcule aisément : $g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Elle s'annule d'après la question précédente en un certain réel $c \neq 0$, qui vérifie donc $cf'(c) - f(c) = 0$, soit $cf'(c) = f(c)$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c a donc pour équation $y = f'(c)(x-c)+f(c) = f'(c)x - cf'(c) + f(c) = f'(c)x$. Cette droite passe effectivement par l'origine.

Exercice 7 (***)

1. En calculant les premières dérivées (on peut avantageusement commencer l'exercice par la deuxième question ici), on devine que P sera un polynôme de degré n. Prouvons donc directement par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où $d°(P_n) = n$. C'est vrai au rang $n = 0$ en posant brillamment $P_0 = 1$, qui est bien de degré 0. Supposons la propriété vraie au rang n, alors $f^{(n+1)(x)} = \left(\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\right)' = \frac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1}-(n+1)\times 2xP_n(x)(1+x^2)^n}{(1+x^2)^{2n+2}} = \frac{(1+x^2)P_n'(x)-2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$, qui est bien de la forme demandée en posant $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2(n+1)XP_n$. Reste à déterminer le degré de ce P_{n+1}, qui est bien un polynôme. Si on nota a_nX^n le coefficient dominant de P_n, alors celui de $(1+X^2)P_n'$ sera $X^2 \times na_nX^{n-1} = na_nX^{n+1}$, et celui de $2(n+1)XP_n$ sera $2(n+1)a_nX^{n+1}$, ce qui donne pour P_{n+1} un terme dominant égal à $-(n+2)a_nX^{n+1}$, ce qui prouve que P_{n+1} est de degré $n+1$ (puisque $n+2$ ne peut pas s'annuler).
2. Soit en utilisant les relations obtenues à la question précédentes, soit par un calcul direct, on trouve $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, soit $P_1 = -2X$, qui a bien sûr pour unique racine 0, puis $f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2+8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, donc $P_2 = 2(3X^2-1)$, qui admet deux racines réelles égales à $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et enfin $f'''(x) = \frac{12x(1+x^2)^3-6x(6x^2-2)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6} = \frac{12x+12x^3-36x^3+12x}{(1+x^2)^4} = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$, donc $P_3 = 24X(1-X^2)$, qui s'annule exactement trois fois, en 0, 1 et -1.
3. En effet, si $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, alors $(x^2+1)f(x) = 1$. On peut certainement appliquer la formule

de Leibniz : en ponsant $g(x) = x^2+1$, alors $(fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$. Or, si $n \geqslant 1$, $(fg)^n(x) = 0$ puisque fg estla fonction constante égale à 1. Par ailleurs, les dérivées successives de la fonction g se calculent très facilement : $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$, et ensuite plus rien. La formule de Leibniz se résume donc à $\binom{n}{0} g(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} g'(x) f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} g''(x) f^{(n-2)}(x) = 0$, soit en reprenant les notations de la première question $(1+x^2) \times \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + 2nx\dfrac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} + n(n-1)\dfrac{P_{n-2}(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$. Quitte à tout multiplier par $(1+x^2)^n$ pour faire disparaitre les dénominateurs, on obtient $P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x) = 0$. C'est exactement l'égalité demandée à un décalage près (on remplace tous les n par des $n+1$).

4. On compare la formule qu'on vient d'obtenir : $P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$, avec celle obtenue dans la première question : $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$. On peut remplacer le $P_{n+1}(x)$ de la première équation par l'expression donnée par la deuxième, les termes en $2(n+1)xP_n(x)$ s'annulent et il ne reste que $(1+x^2)P_n'(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$, soit $P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.
5. On s'en doute, la réponse est non. Supposons donc que P_n admette une racine (au moins) double x, alors d'après la caractérisation des racines doubles, $P_n'(x) = 0$. La relation de la question précédente implique alors $P_{n-1}(x) = 0$. Mais alors, comme $P_n(x) = (1+x^2)P_{n-1}'(x) - 2nxP_{n-1}(x)$ (c'est la relation de la première question, simplement décalée), on aura certainement $(1+x^2)P_{n-1}'(x) = 0$, puis $P_{n-1}'(x)$, et x sera donc racine double de P_{n-1}. Bon, mais en suivant le même raisonnement, x sera encore racine double de P_{n-2}, etc. Allez, faisons un raisonnement rigoureux : notons n_0 le plus petit entier naturel pour lequel P_n admet une racine double. Cet entier n'est sûrement pas égal à 0, puisque le polynôme P_0 n'a pas de racine (ni 1, 2 ou 3 d'ailleurs d'après les calculs de la deuxième question). Mais alors, si $n_0 \geqslant 1$, d'après le raisonnement précédent, P_{n_0-1} admet aussi une racine double (la même que P_{n_0}), ce qui contredit complètement la minimalité de l'entier n_0. Cet entier ne peut donc pas exister, et aucun des polynômes P_n n'admet de racine double.

Exercice 8 (***)

Comme le signale l'énoncé de l'exercice, on va faire, non pas une récurrence sur l'entier n, mais fixer ce n une bonne fois pour pour toutes et montrer par récurrence sur k que, $\forall k \leqslant n$, la fonction $f^{(k)}(x)$ s'annule (au moins) k fois entre -1 et 1 (et même dans $]-1,1[$ pour être précis). C'est évidemment vrai au rang 0 : la fonction f s'annule au moins 0 fois sur $]-1,1[$ (en l'occurence, elle ne s'annule effectivement pas puisque f s'annule uniquement en 1 et en -1, sauf pour $n=0$). Supposons que notre dérivée k-ème s'annule bien k fois, en des valeurs que l'on va noter x_1, x_2, …, x_k vérifiant $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < 1$. On sait par ailleurs que, comme $f(x) = (1-x^2)^n$, $f'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1}$, puis $f''(x) = -2n(1-x^2)^{n-1} + 2n(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2} = (-2n(1-x^2) + 2n(n-1)x^2)(1-x^2)^{n-2}$ etc. On prouve par une récurrence facile que $f^{(k)}(x) = P_k(x)(1-x^2)^{n-k}$ pour tout entier $k \leqslant n$ (au-delà, ça ne marche plus !), où P_k est un polynôme que l'on ne cherchera absolument pas à expliciter (si vous y tenez, pour l'hérédité, on calcule $(P_k(x)(1-x^2)^{n-k})' = (P_k'(x)(1-x^2) - 2x(n-k)P_k(x))(1-x^2)^{n-k-1}$). Ce qui est important pour nous, c'est ce $(1-x^2)^{n-k}$ en facteur qui assure que, si $k \leqslant n-1$, $f^{(k)}(x)$ s'annule en 1 et en -1 en plus des racines déjà obtenues grâce à l'hypothèse de récurrence. On peut alors appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[-1, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_k, 1]$. Puisque $f^{(k)}$ s'annule aux deux bornes de chacun de ces intervalles, sa dérivée $f^{(k+1)}$ s'annule à l'intérieur de chaque intervalle, ce qui prouve l'existence de $z_1 \in]-1, x_1[$, $z_2 \in]x_1, x_2[$, …$z_{k+1} \in]x_k, 1[$ annulant $f^{(k+1)}$. On a en particulier prouvé que $f^{(k+1)}$ s'annule (au moins) en $k+1$ réels distincts de l'intervalle $]-1,1[$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. Puisque cette hérédité fonctionne jusqu'à $k = n-1$, la dernière propriété obtenue grâce à cette récurrence stipule que $f^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]-1,1[$. Or, en tant que dérivée n-ème d'un polynôme de degré $2n$, la fonction $f^{(n)}$ est certainement un polynôme de degré n, et ne peut donc admettre plus de n racines, ni de racine double si elle admet déjà n racines distinctes. Autrement dit, on est certain que les n racines trouvées sont les seules racines de $f^{(n)}$ et qu'elles sont simples. Accessoirement, elles sont toutes dans l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 9 (**)

Puisque la racine carrée ne s'annule qu'en $x = 1$, la fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$. On peut commencer par calculer $f'(x) = -\dfrac{-2x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, et surtout constater que $f'(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)}f(x)$, ou encore que $(1-x^2)f'(x) = xf(x)$. On applique à cette égalité la formule de Leibniz. Pour le membre de droite, les dérivées de la fonction identité s'annulent à partir de la dérivée seconde, on n'a donc que deux termes dans la somme : en notant $g(x) = xf(x)$, $g^{(n)}(x) = \binom{n}{0}xf^{(n)}(x) + \binom{n}{1} \times 1 \times f^{(n-1)}(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$. Posons maintenant $h(x) = (1-x^2)f'(x)$ et appliquons à nouveau la formule de Leibniz, sachant que cette fois c'est à partir de la dérivée troisième que le facteur polynômial va s'annuler : $h^{(n)}(x) = (1-x^2)f^{(n+1)}(x) - 2nxf^{(n)}(x) - n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$. En réorganisant les termes de l'égalité, on a donc $(1-x^2)f^{(n+1)}(x) = (2n+1)xf^{(n)}(x) + n^2f^{(n-1)}(x)$. Démontrons alors la propriété souhaitée par récurrence double sur n. Les fonction f et f' (calculée plus haut) sont positives sur $[0,1[$, ce qui prouve la double initialisation de la récurrence. Supposons maintenant que $f^{(n-1)}$ et $f^{(n)}$ sont positives sur $[0,1[$ (décaler l'hypothèse de récurrence est plus pratique ici au vu des calculs effectués), alors $(2n+1)xf^{(n)}(x) + n^2f^{(n-1)}(x)$ est aussi positif sur $[0,1[$, donc $(1-x^2)f^{(n+1)}(x) \geqslant 0$ et $f^{(n+1)}(x) \geqslant 0$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence.

Exercice 10 (**)

1. Supposons donc que les points A et B aient pour coordonnées $(\sqrt{1-k^2}, k)$ et $(-\sqrt{1-k^2}, k)$ (pour que les points soient sur le cercle trigonométrique, ils doivent satisfaire à l'équation $x^2+y^2 = 1$), et notons (x,y) les coordonnées du point C. En prenant comme base du triangle le côté $[AB]$ qui a donc pour longueur $2\sqrt{1-k^2}$, l'aire du triangle est égale à $\sqrt{1-k^2} \times |y-k|$ (la hauteur du triangle correspond simplement à la distance entre les ordonnées des points C et A puisque la base est par hypothèse « horizontale »). Or, y varie entre -1 et 1, donc $|y-k|$ est maximale quand $y = 1$ (si $k \leqslant 0$) ou quand $y = -1$ (si $k \geqslant 0$), et l'aire maximale recherchée est donnée par $f(k) = \sqrt{1-k^2}(1+|k|)$.
2. La fonction f est paire, contentons-nous de chercher son maximum sur $[0,1]$, où $f(k) = \sqrt{1-k^2}(1+k)$. On calcule (f n'est dérivable que sur $]0,1[$ a priori, mais c'est bien suffisant pour étudier les variations) $f'(k) = \dfrac{-2k}{2\sqrt{1-k^2}}(1+k) + \sqrt{1-k^2} = \dfrac{1-k^2-k-k^2}{\sqrt{1-k^2}} = \dfrac{1-k-2k^2}{\sqrt{1-k^2}}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, qui a pour racine évidente $k = -1$, et pour deuxième racine $k = \dfrac{1}{2}$. Elle est positive entre ses racines, ce qui prouve que f admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$, de valeur $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Cela correspond au cas d'un triangle équilatéral.

Exercice 11 (**)

1. Posons donc $h : x \mapsto f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. La fonction h est évidemment continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, $h(a) = f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$, et $h(b) = f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) = h(a)$. La fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, sa dérivée s'annule sur $]a, b[$. Comme cette dérivée vaut $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, le point d'annulation de la dérivée vérifie exactement l'équation de l'énoncé.
2. Plaçons-nous sur un voisinage de a où toutes les hypothèses sont vérifiées, si on note b un point d'un tel voisinage, il existe d'après la question précédente un x entre a et b tel que $f'(x)g(b) = g'(x)f(b)$ (par hypothèse, $f(a) = g(a) = 0$), ou encore $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{f(b)}{g(b)}$. Si on fait tendre b vers a, puisque x est compris entre a et b, x tend également vers a, donc $\lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b)}{g(b)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.
3. On vérifie aisément que les hypothèses de la question précédente sont présentes : en posant $f(x) = 1 - \cos(x)$ et $g(x) = x^2$, $f(0) = g(0) = 0$, les deux fonctions sont continues et dérivables partout, et les deux fonctions ne s'annulent pas sur $] - \pi; \pi[$. Enfin, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\sin(x)}{2x}$ a bien une limite finie en 0, en l'occurence $\dfrac{1}{2}$ en utilisant la limite classique $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. On conclut de l'application de la règle de l'Hôpital que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

   Le deuxième cas est très similaire : on pose $f(x) = \ln(1 + x) - x$ et $g(x) = x^2$, les deux fonctions s'annulent en 0, sont évidemment dérivables et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \dfrac{-x}{(1 + x)2x} = -\dfrac{1}{2(1 + x)}$ a pour limite $-\dfrac{1}{2}$ en 0. On conclut comme précédemment que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$, ou encore que $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. C'est le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0, développement limité dont on peut obtenir la suite par la même méthode. Si on pose désormais $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{1}{2}x^2$ et $g(x) = x^3$, les fonctions vérifient les hypothèses de la règle de l'Hôpital, et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} = \dfrac{1 + x^2 - 1}{3x^2(1 + x)} = \dfrac{1}{3(1 + x)}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{3}$ quand x tend vers 0. Autrement dit, $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)$. Vous pouvez deviner la suite, on le démontrera dans un prochain chapître.

Exercice 12 (**)

1. Il n'y a absolument rien à prouver, c'est la définition de la limite (on peut toujours choisir un A strictement positif quitte à le prendre volontaire « trop grand ») !
2. On pose $g(x) = f(x) - lx$, fonction certainement dérivable sur $[A, +\infty[$, et qui vérifie d'après la question précédente $|g'(x)| \leqslant \varepsilon$ sur cet intervalle. On peut donc en déduire (inégalité des accroissements finis) que, si $x \geqslant A$, $|g(x) - g(A)| \leqslant \varepsilon|x - A|$, puis par inégalité triangulaire $|f(x) - lx| = |g(x)| \leqslant |g(x) - g(A)| + |g(A)| \leqslant \varepsilon|x - A| + |f(A) - Al|$.
3. On divise l'inégalité précédente par $|l|x$: $\left|\dfrac{f(x)}{lx} - 1\right| \leqslant \varepsilon\dfrac{x - A}{|l|x} + \dfrac{|f(A) - Al|}{|l|x}$. Le premier terme du membre de droite est inférieur à $\dfrac{\varepsilon}{|l|}$, et le deuxième tend vers 0, donc sera inférieur à

$\dfrac{\varepsilon}{|l|}$ quitte à se placer sur un intervalle $[A', +\infty[$ un peu plus restreint. Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A' > 0$, $\forall x \geqslant A'$, $\left|\dfrac{f(x)}{lx} - 1\right| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{|l|}$. Comme $\dfrac{2}{|l|}$ est une constante, on a une propriété équivalente à la définition de la limite, ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{lx} = 1$.

Exercice 13 (***)

1. Si $f'(a) = 0$ ou $f'(b) = 0$, on n'a plus rien à chercher, supposons donc que les deux inégalités sont strictes. La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$ puisque dérivable, elle y admet d'après le théorème du maximum un maximum atteint en un certain point c. Or, comme on a supposé $f'(a) > 0$, le taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ prend nécessairement des valeurs strictement positives sur un voisinage à droite de 0 (on écrit par exemple la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{f'(a)}{2}$ pour obtenir un tel voisinage), ce qui implique que $f(x) > f(a)$ sur un voisinage à droite de a. En particulier, on ne peut pas avoir $c = a$. Le même raisonnement prouve que, comme $f'(b) < 0$, la fonction f prend des valeurs strictement supérieures à $f(b)$ à gauche de b, ce qui prouve qu'on ne peut pas avoir non plus $c = b$. On en déduit que $c \in]a, b[$, et un théorème du cours nous assure alors que $f'(c) = 0$.
2. On suppose de même $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Cette fois-ci c'est le minimum de la fonction qui ne peut pas être atteint en a (on a des valeurs de f strictement inférieures à $f(a)$ à droite de a) ni en b, ce qui prouve à nouveau l'existence d'un point d'annulation de f' sur $[a, b]$.
3. Supposons donc f dérivable sur le segment $[a, b]$ et $c \in [f(a), f(b)]$ (intervalle dans un sens ou dans l'autre, peu importe, on suppose par souci de simplicité que $f'(a) \leqslant f'(b)$). On pose alors $g(x) = f(x) - cx$, la fonction g est tout aussi dérivable sur $[a, b]$ et $g'(a) = f'(a) - c \leqslant 0$, $g'(b) = f'(b) - c \geqslant 0$. Les questions précédentes prouvent alors que g' s'annule sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $g'(x) = f'(x) - c$, cela prouve qu'il existe un point pour lequel $f'(x) = c$, ce qui est exactement l'énoncé du théorème de Darboux.
4. Il suffit de trouver une fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue sur un segment. Il existe plein d'exemples classiques, mais rien de très très simple. Par exemple, $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ est une fonction qui convient : on sait que $-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ si $x \neq 0$, ce qui suffit à prouver que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et valide donc le prolongement par continuité. De plus, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (toujours si $x \neq 0$, bien entendu). Cette fonction n'a pas de limite en 0 (le morceau de gauche tend vers 0 par encadrement, mais il est facile de créer des suites pour lesquelles celui de droite tend vers 0 ou vers 1 par exemple). Pourtant, $\tau_{0,f}(h) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ a bien une limite nulle en 0 (toujours le même encadrement, ici par $-|x|$ et par $|x|$), ce qui prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

Exercice 14 (***)

1. En posant $x = y = 0$, on trouve $f(0)(1 - f(0)^2) = 2f(0)$, donc soit $f(0) = 0$, soit $1 - f(0)^2 = 2$, ce qui est impossible car cela impliquerait $f(0)^2 = -1$. On peut donc conclure directement que $f(0) = 0$.
2. On fixe dans l'égalité précédente la valeur de y et on dérive pour obtenir $f'(x + y)(1 - f(x)f(y)) - f'(x)f(y)f(x + y) = f'(x)$. Posons alors $x = 0$ et n'oublions pas que $f(0) = 0$ pour trouver $f'(y) - f'(0)f(y)^2 = f'(0)$, soit $f'(0)(1 + f(y)^2) = f'(y)$, ou encore (on peut

diviser, ça ne s'annule jamais) $\dfrac{f'(y)}{1+f(y)^2} = f'(0)$. La variable importe peu, on peut remplacer les y par des x pour trouver la formule de l'énoncé.

3. Notons $a = f'(0)$, on vient de prouver que $\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = a$, soit $(\arctan(f(x)))' = a$. Il suffit d'intégrer cette équation pour trouver $\arctan(f(x)) = ax + b$, où a et b sont effectivement deux constantes réelles.
4. Le problème de l'égalité précédente, c'est qu'on sait bien que la fonction arctan ne prend ses valeurs qu'entre -1 et 1. En particulier, $\arctan(f(x)) \in]-1,1[$ quelle que soit la fonction f. On devrait donc avoir, $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax + b \in]-1,1[$. Ce n'est possible que si $a = 0$, donc si la fonction f est constante égale à b. Comme on sait que $f(0) = 0$, la constante b est nécessairement nulle, et la fonction f est donc nulle. Réciproquement, la fonction nulle est bien solution du problème posé.

Exercice 15 (** à ***)

1. Posons donc $f(x) = \sqrt{x^2+(x-1)^2} + \sqrt{x^2+(x+1)^2}$ et essayons d'étudier les variations de la fonction f. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui est sous chaque racine carrée est toujours positif comme somme de deux carrés et même strictement positif car les deux carrés ne peuvent pas s'annuler simultanément) et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+(x-1)^2}} + \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+(x+1)^2}}$. Cette dérivée est trivialement positive sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ où chacun des deux numérateurs est positif. Si $x \leqslant \dfrac{1}{2}$, on aura $f'(x) \geqslant 0$ si $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+(x+1)^2}} \leqslant \dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+(x-1)^2}}$, donc en élevant tout au carré (par hypothèse sur l'intervalle de travail, tout est positif) et en faisant le produit en croix, si $(2x+1)^2(x^2+(x-1)^2) \geqslant (1-2x)^2(x^2+(x+1)^2)$, soit $(4x^2+4x+1)(2x^2-2x+1) - (4x^2-4x+1)(2x^2+2x+1) \geqslant 0$, ou encore en développant tout sans même essayer de faire des choses subtiles (on peut gagner un peu de temps) si $8x^4-2x^2+2x+1-(8x^4-2x^2-2x+1) \geqslant 0$. Tout se simplifie ou presque, il ne reste que la condition très simple $4x \geqslant 0$. La fonction f est donc en fait décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, avec un minimum de valeur $f(0) = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$, ce qui prouve l'inégalité demandée. Existe-t-il une méthode pour obtenir ce résultat sans bourriner salement les calculs ? Pas à ma connaissance...
2. Quitte à tout passer dans un joli ln, l'inégalité demandée est équivalente à $\dfrac{1}{n}\ln(a_1a_2\dots a_n) \leqslant \ln\left(\dfrac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)$, ou encore avec les propriétés bien connues de la fonction ln : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$. Ce qui ressemble énormément à une inégalité de Jensen appliquée avec les coefficients $t_i = \dfrac{1}{n}$ (dont la somme est bien égale à 1). Elle est « dans le mauvais sens » et sera donc vérifiée si la fonction ln est concave, ou si on préfère la remettre dans le bon sens si $-\ln$ est convexe, ce qui est bien sûr le cas (par exemple car, en posant $f(x) = -\ln(x)$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$ puis $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$ qui est positif sur $]0, +\infty[$).
3. Pour simplifier les calculs, on va réécrire l'inégalité légèrement différemment : tout étant positif, on peut changer de côté out ce qu'on veut pour se ramener à montrer que $\dfrac{\sin^3(x)}{\cos(x)} > x^3$. Posons donc $f(x) = \dfrac{\sin^3(x)}{\cos(x)} - x^3 = \dfrac{\sin(x)(1-\cos^2(x))}{\cos(x)} - x^3 = \tan(x) - \sin(x)\cos(x) - x^3$. La fonction f est certainement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, ce qui tombe plutôt bien puisqu'on va

la dériver quelques fois, jusqu'à obtenir une expression dont le signe n'est pas trop pénible à obtenir : $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) - 3x^2$, trop compliqué, $f''(x) = 2\tan(x)(1 + \tan^2(x)) + 4\cos(x)\sin(x) - 6x = 2\tan(x) + 2\tan^3(x) + 4\cos(x)\sin(x) - 6x$, encore trop compliqué, $f'''(x) = 2 + 2\tan^2(x) + 6\tan^2(x) + 6\tan^4(x) + 4\cos^2(x) - 4\sin^2(x) - 6 = 8\tan^2(x) + 6\tan^4(x) - 8\sin^2(x)$ en appliquant la formule $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ pour faire disparaitre toutes les constantes. Or, sur notre intervalle d'étude, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$ (concavité du sinus et convexité de la tangente, qui ont une tangente commune d'équation $y = x$ en 0), donc $8\tan^2(x) - 8\sin^2(x) \geqslant 0$, ce qui implique facilement $f'''(x) \geqslant 0$. La dérivée seconde f'' est donc croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, et comme $f''(0) = 0$ (tous les termes sont nuls), f'' est donc elle-même positive. On continue à remonter : f' est croissante et $f'(0) = 0$ (les seuls termes non nuls sont le 1 et le $-\cos^2(0)$ égal à -1), donc f' est positive et f croissante. Il ne reste plus qu'à vérifier que $f(0) = 0$ pour en déduire la positivité de la fonction f et l'inégalité souhaitée.

4. Posons donc $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$, puis $f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} > 0$, donc la fonction f est convexe. Appliquons l'inégalité de Jensen aux réels a_i avec des coefficients tous égaux à $\frac{1}{n}$ (pour avoir une somme égale à 1) : $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(a_i)$. Comme on a de plus supposé $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, cela revient à dire que $\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geqslant nf\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{(n^2+1)^2}{n}$, soit l'inégalité souhaitée.

Exercice 16 (**)

1. La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisque $1 + e^x \geqslant 1$. On calcule donc simplement $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$, puis $f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, qui est manifestement toujours positive. La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Écrivons l'inégalité de Jensen pour la fonction f, avec des coefficients égaux (et donc tous égaux à $\frac{1}{n}$ pour avoir une somme égale à 1) : $\ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{y_i})$. Les propriétés de la fonction ln et de la fonction exponentielle permettent de réécrire ceci sous la forme $\ln\left(1 + \left(\prod_{i=1}^n e^{y_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \ln\left(\left(\prod_{i=1}^n (1 + e^{y_i})\right)^{\frac{1}{n}}\right)$. On peut évidemment supprimer les ln dans les deux membres de l'inégalité, et il ne reste plus qu'à poser $x_i = e^{y_i}$ (ou autrement dit $y_i = \ln(x_i)$, ce qu'on peut faire puisque les nombres sont supposés strictement positifs) pour reconnaître l'inégalité demandée.
3. Une astuce débile : on applique l'inégalité précédente aux réels strictement positifs $\frac{x_k}{y_k}$: $1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{y_k}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n 1 + \frac{x_k}{y_k}}$, puis on multiplie les deux membres de l'inégalité par $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n y_k}$ (qui est évidemment positif), ce qui donne exactement la nouvelle inégalité souhaitée.

Exercice 17 (***)

1. Commençons par calculer $f'(x) = \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$, puis dérivons une deuxième fois : $f''(x) = \dfrac{-x^3\sin(x)-2x(x\cos(x)-\sin(x))}{x^4} = \dfrac{2\sin(x)-2x\cos(x)-x^2\sin(x)}{x^3}$.

2. Rappelons déjà que $\sin^{(0)}(x) = \sin(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$, $\sin''(x) = -\sin(x)$ et $\sin'''(x) = -\cos(x)$. On en déduit que $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, puis $P_1 = X$ et $Q_1 = 1$, et enfin $P_2 = X^2 - 2$ et $Q_2 = 2X$ (en faisant attention aux signes). Il semblerait bien qu'on ait $Q_n = P'_n$.

3. La récurrence a déjà été triplement initialement lors de la question précédente. Supposons donc que, pour un certain entier n, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$, alors en dérivant ce quotient, $f^{(n+1)}(x)$
$= \dfrac{x^{n+1}(P'_n(x)\sin^{(n)}(x) + P_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q'_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+2)}(x))}{x^{n+2}}$
$\dfrac{-(n+1)x^n(P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x))}{}$. En simplifiant tout par x^n et en utilisant le fait que $\sin^{(n+2)}(x) = -\sin^{(n)}(x)$, on peut obtenir la forme $f^{(n+1)}(x)$
$= \dfrac{(xQ_n(x) - xP'_n(x) + (n+1)P_n(x))\sin^{(n+2)}(x) + (xP_n(x) + xQ'_n(x) - (n+1)Q_n(x))\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+2}}$,
ce qui est de la forme souhaitée en posant $P_{n+1} = XP_n + XQ'_n - (n+1)Q_n$ et $Q_{n+1} = XQ_n - XP'_n + (n+1)P_n$. Ce calcul prouve l'hérédité et achève donc notre récurrence.

4. On prouve par une récurrence immédiate (et simultanée) que P_n et Q_n sont à coefficients entiers : c'est le cas de P_0 et Q_0, et en supposant que P_n et Q_n sont à coefficients entiers, alors $Q'n$ et P'_n le sont également donc P_{n+1} et Q_{n+1} aussi vu les formules obtenues à la question précédente.

   Il semblerait au vu des premières valeurs calculées que P_n soit de degré n et Q_n de degré $n-1$ (pour $n \geqslant 1$), et que P_n ait pour coefficient dominant 1 et Q_n pour coefficiant dominant n. Prouvons-le à nouveau par récurrence. L'initialisation a déjà été faite, supposons donc les relations vérifiées au rang n. Les polynômes XP_n, XQ'_n et $(n+1)Q_n$ sont alors de degrés respectifs $n+1$, $n-1$ et $n-1$, ce qui prouve que P_{n+1} est nécessairement de degré $n+1$. De plus, son coefficient dominant est celui de XP_n, donc le même que celui de P_n qui a été supposé égal à 1. Concernant Q_{n+1}, on a un tout petit peu plus de travail : XQ_n a pour terme dominant nX^n, XP'_n a pour terme dominant $X \times (nX^{n-1}) = nX^n$ qui va donc s'annuler avec le précédent quand on va faire la différence des deux polynômes ; et $(n+1)P_n$ a pour terme dominant $(n+1)X^n$. Finalement, Q_{n+1} aura donc un terme dominant égal à $(n+1)X^n$, ce qui prouve bien l'hérédité de notre récurrence.

   Enfin, une dernière récurrence permet de prouver que P_n a la même parité que n et Q_n la parité opposée. C'est vrai pour les premiers polynômes calculés, et en le supposant vrai au rang n, alors XP_n, Q_n et XQ'_n ont tous les trois une parité opposée à celle de P_n (le produit par X change la parité, la dérivation également, et Q_n est par hypothèse de récurrence de parité opposée à P_n), donc P_{n+1} est de parité opposée à P_n. De même, Q_n est de parité opposée à Q_n.

5. On calcule donc $P_3 = XP_2 + XQ'_2 - 3Q_2 = X^3 - 2X + 2X - 6X = X^3 - 6X$ et $Q_3 = XQ_2 - XP'_2 + 3P_2 = 2X^2 - 2X^2 + 3X^2 - 6 = 3X^2 - 6$.

6. Supposons la relation $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x)$ vérifiée pour tout réel, alors en particulier $U(n\pi)\cos(n\pi) + V(n\pi)\sin(n\pi) = 0$, ce qui implique que, pour tout entier naturel n, $U(n\pi) = 0$. Le polynôme U admet donc une grosse infinité de racines, il est nécessairement nul. On a alors $V(x)\sin(x) = 0$, ce qui implique également que V s'annule énormément (pour tous les réels pour lesquels $\sin(x) \neq 0$), et donc que $V = 0$.

7. Toutes les fonction impliquées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc appliquer la formule de Leibniz (au rang $n+1$ pour avoir plus rapidement les relations souhaitées) pour obtenir $\sin^{(n+1)}(x) = (\mathrm{id} \times f)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \mathrm{id}^{(k)}(x) f^{(n+1-k)}(x) = x f^{(n+1)}(x) + (n+1) f^{(n)}(x)$. Autrement dit, en multipliant tout par x^{n+1}, $x^{n+1} \sin^{(n+1)}(x) = (P_{n+1}(x) + (n+1)Q_n(x)) \sin^{(n+1)}(x) + ((n+1)P_n(x) - Q_{n+1}(x)) \sin^{(n)}(x)$. La question précédente montre qu'on peut alors affirmer que les coefficients devant $\sin^{(n)}$ et $\sin^{(n+1)}$ sont nuls (au signe près, l'un des deux est égal à sin et l'autre à cos). On en déduit que $P_{n+1} + (n+1)Q_n = X^{n+1}$ et $(n+1)P_n - Q_{n+1} = 0$.
8. En identifiant ces formules avec celles déjà obtenues pour P_{n+1} et Q_{n+1}, on obtient d'une part à l'aide de la deuxième équation $(n+1)P_n - XQ_n + XP_n' - (n+1)P_n = 0$ donc $Q_n = P_n'$, et d'autre part à l'aide de la première formule $XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n + (n+1)Q_n = X^{n+1}$, donc $XP_n + XP_n'' = X^{n+1}$ et $P_n + P_n'' = X^n$.
9. La forme générale demandée découle immédiatement de la parité du polynôme P_n donnée plus haut dans l'exercice (un terme sur deux s'annule à partir de X^n). De plus, si $P_n = \sum_{k=0}^{p} a_k X^{n-2k}$, alors $P_n'' = \sum_{k=0}^{p} a_k (n-2k)(n-2k-1) X^{n-2k-2}$, et la relation $P_n + P_n'' = X^n$ implique les égalités suivantes par identification des coefficients : $a_0 = 1$, puis $a_1 + n(n-1)a_2 = 0$, donc $a_2 = -n(n-1)$, puis $a_2 + (n-2)(n-3)a_1 = 0$, donc $a_2 = n(n-1)(n-2)(n-3) = \dfrac{n!}{(n-4)!}$. On démontre alors facilement (par récurrence) que $a_k = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-2k)!}$, donc $P_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \dfrac{n!}{(n-2k)!} X^{n-2k}$.
10. On a vu plus haut que le polynôme P_n était une solution particulière de cette équation linéaire du second ordre à coefficients constants. Or, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ (c'est du cours !), donc les solutions de l'équation complète sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + P_n(x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 18 (**)

1. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x$. Elle admet donc un maximum en $x = 2$, de valeur $f(2) = 1 + \dfrac{1}{4}(2-4) = \dfrac{3}{2}$, et est croissante sur $]-\infty, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$. Les points fixes sont déterminés en résolvant l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{4}(2 - x^2) = 0$, d'où deux points fixes pour $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
2. En effet, si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant -\dfrac{1}{2}x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Quant à l'image de $[1, 2]$ par f, comme la fonction est croissante sur cette intervalle, elle vaut $[f(1), f(2)] = \left[\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{2}\right] \subset [1, 2]$.
3. C'est une récurrence toute simple : $u_0 = 1 \in [1, 2]$, et si $u_n \in [1, 2]$, on a d'après la question précédente $f(u_n) \in [1, 2]$, soit $u_{n+1} \in [1, 2]$. Comme $u_n \in [1, 2]$ et $\sqrt{2} \in [1, 2]$, et que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'IAF entre u_n et $\sqrt{2}$ et obtenir $|f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (c'est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$ (par définition), on a bien $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouvons par récurrence P_n : $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que

$|1-\sqrt{2}| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vraie, on a alors d'après la question précédente $|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\sqrt{2}|$, et par ailleurs, par hypothèse de récurrence $|u_n-\sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$. On peut combiner les deux inégalités pour obtenir $|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Cela prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

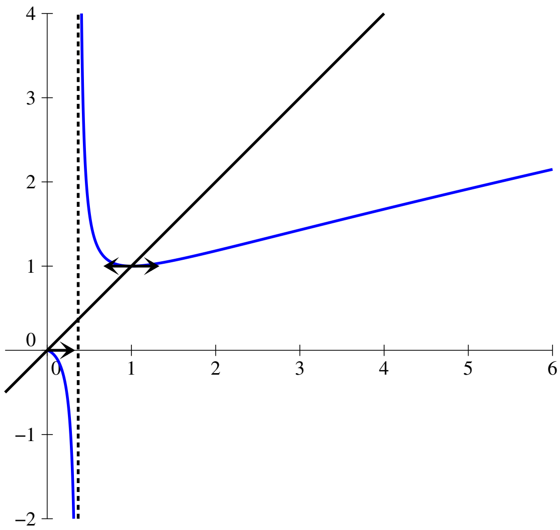
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, et $0 \leqslant |u_n-\sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\sqrt{2}| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

5. On sait que l'inégalité sera vérifiée dès que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$, soit en passant au logarithme $-n\ln 2 \leqslant -9\ln 10$, ou encore $n \geqslant \frac{9\ln 10}{\ln 2} \simeq 30$. Il faut donc calculer le trentième terme de la suite pour être certain d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près. En pratique, on constate en fait que le terme u_{19} est déjà une valeur approchée à 10^{-9} près.

Exercice 19 (**)

1. En effet, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée). De plus, f est dérivable et C^1 sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln x + 1 - 1}{(\ln x+1)^2} = \frac{\ln x}{(\ln x+1)^2}$, qui a également pour limite 0 en 0 (en factorisant par exemple par $\ln(x)$ en haut et en bas). D'après le théorème de prolongement de la dérivée, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

2. On a déjà calculé f', il est donc facile de constater que f est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; 1\right]$, et croissante sur $[1; +\infty[$. On peut ainsi tracer la courbe suivante :



3. Résolvons $f(x) = x$. Si on élimine la valeur 0 (qui est effectivement un point fixe de f), on peut simplifier par x et obtenir $\frac{1}{\ln x + 1} = 1$, soit $\ln x + 1 = 1$, donc $x = 1$. Il y a donc deux points fixes : 0 et 1.

4. (a) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $g'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$. Elle admet donc un maximum en 1, de valeur $g(1) = \frac{1}{4}$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

on en déduit que $\forall x \geqslant 0$, $0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. Or, on a $f'(x) = g(\ln x)$. Si $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$, et on peut lui appliquer l'inégalité précédente : $0 \leqslant g(\ln x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, c'est-à-dire $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

(b) Pour appliquer l'IAF, il faut d'abord vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1, +\infty[$. En constatant que l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par f, on peut le prouver par une simple récurrence : $x_0 = 2 \geqslant 1$, et en supposant $x_n \geqslant 1$, on obtient, en utilisant la croissance de f sur $[1, +\infty[$, $f(x_n) \geqslant f(1) = 1$, donc $x_{n+1} \geqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

On a donc $1 \in [1, +\infty[$ et $x_n \in [1, +\infty[$. De plus, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ sur $[1; +\infty[$. En appliquant l'IAF, on obtient donc $|f(x_n) - f(1)| \leqslant |x_n - 1|$, soit $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$.

Prouvons ensuite par récurrence la propriété $P_n : |x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. Pour $n = 0$, P_0 stipule que $|2 - 1| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons ensuite P_n vraie, on obtient alors $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$ (cf plus haut) $\leqslant \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4^n}$ (hypothèse de récurrence), ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

(c) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0$, et $0 \leqslant |x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |x_n - 1| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

Exercice 20 (***)

1. La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions usuelles. Par ailleurs, en tant que quotient de fonctions impaires, la fonction f est paire.

2. On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$ (et si on ne le sait pas, on le retrouve par exemple en constatant que $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$ est le taux d'accroissement de sh en 0, et a donc pour limite $\mathrm{ch}(0) = 1$ en 0), donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)} = 1$, et on peut prolonger la fonction f en posant $f(0) = 1$. La dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}$. Pas de méthode simple malheureusement pour calculer la limite en 0 de cette dérivée, il faut soit utiliser des développements limités (c'est alors très simple) soit au moins avoir recours à la règle de l'Hôpital de l'exercice 11. On peut alors écrire, sous réserve d'existence de toutes ces limites, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(x) - x\,\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x\,\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)}$. Ce quotient a manifestement pour limite 0 en 0. La fonction f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. Ce n'est pas une surprise dans la mesure où la fonction est paire. Passons à la dérivée seconde : $f''(x) = \dfrac{-x\,\mathrm{sh}^3(x) - 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)(\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x))}{\mathrm{sh}^4(x)} = \dfrac{2x\,\mathrm{ch}^2(x) - 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{sh}^3(x)}$. Tentons une fois de plus le recours à la règle de l'Hôpital, le quotient des dérivées vaut $\dfrac{2\,\mathrm{ch}^2(x) + 4x\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) - 2\,\mathrm{ch}^2(x) - 2\,\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{3\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}^2(x)}$
$= \dfrac{2x\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) - 3\,\mathrm{sh}^2(x)}{3\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}^2(x)} = \dfrac{2x\,\mathrm{ch}(x) - 3\,\mathrm{sh}(x)}{3\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)} \underset{x \to 0}{=} \dfrac{2}{3}\dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$, qui a pour limite $-\dfrac{1}{3}$ en 0, donc par applciation du théorème de prolongement de la dérivée (à la dérivée de f), la fonction f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$.
Pour les curieux, avec les développements limités, on aurait simplement pu écrire ceci :

$f(x) = \dfrac{x}{\text{sh}(x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$ et en déduire immédiatement les valeurs demandées.

3. Il s'agit de résoudre l'équation $e^x - e^{-x} = 2$, soit $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ quitte à multiplier par e^x. En posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet deux solutions $X_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $X_2 = 1 + \sqrt{2}$. Puisque $X_1 < 0$, on peut éliminer cette solution, et garder comme unique solution de l'équation initiale $\alpha = \ln(X_2) = \ln(1 + \sqrt{2})$. Comme $1 + \sqrt{2} < e$ (on a environ $2,42$ à gauche, et $2,72$ à droite), $\alpha \in]0,1[$. Comme on sait que $\text{ch}^2(\alpha) - \text{sh}^2(\alpha) = 1$, on peut dire que $\text{ch}^2(\alpha) = 2$, donc $\text{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$ (cette fonction ne prenant que des valeurs positives).
4. La fonction $g : t \mapsto \text{ch}(t) - t$ a pour dérivée $\text{sh}(t) - 1$, dont on vient de voir qu'elle s'annule uniquement en α. La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Elle admet pour minimum $g(\alpha) = \text{ch}(\alpha) - \alpha = \sqrt{2} - \alpha > 0$ puisque $\alpha \in]0,1[$. La fonction g est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour démontrer les inégalités suivantes, commençons par poser $h(t) = t\,\text{ch}(t) - \text{sh}(t)$, alors $h'(t) = \text{ch}(t) + t\,\text{sh}(t) - \text{ch}(t) = t\,\text{sh}(t) \geqslant 0$. La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$, comme $h(0) = 0$, la fonction h est positive. Posons désormais $i(t) = \dfrac{1}{2}\text{sh}^2(t) - t\,\text{ch}(t) + \text{sh}(t)$, on calcule $i'(t) = \text{sh}(t)\,\text{ch}(t) - t\,\text{sh}(t) = \text{sh}(t)(\text{ch}(t) - t) \geqslant 0$ d'après le début de la question. La fonction i est donc croissante, et s'annule elle aussi en 0, elle est positive, ce qui prouve la deuxième inégalité.
5. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (par croissance comparée), elle admet nécessairement un point fixe sur $[0, +\infty[$. Vous n'êtes pas convaincus ? Posez $g(x) = f(x) - x$, alors g est elle aussi décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (même si c'est ici inutile de s'en rendre compte), vérifie $g(0) = 1$, et $g(1) = f(1) - 1 < 0$, puisque $f(1) < f(0) = 1$, donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g, celle-ci s'annule entre 0 et 1, ce qui correspond à un point fixe de f. En fait, on connait très bien ce point fixe : c'est α puisque $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\text{sh}(\alpha)} = \alpha$ (par définition, $\text{sh}(\alpha) = 1$). La fonction f' étant majorée en valeur absolue par $\dfrac{1}{2}$ d'après la question précédente, on peut écrire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Par une récurrence facile (et très classique), on prouve alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$: c'est vrai au rang 0 car $|u_0 - \alpha| = \alpha \leqslant 1$, et en le supposant au rang n, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Une simple application du théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Problème 1 (***)

1. (a) C'est une équation du second degré, qu'on sait très bien résoudre : $\Delta = 1 + 4 = 5$, $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. La deuxième solution est manifestement négative, quant à la première, on peut l'encadrer en partant de $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$, donc $\dfrac{1}{2} < x_1 < 1$. Il y a donc bien une solution unique à l'équation sur l'intervalle $]0,1[$.

   (b) Si $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, on a $\dfrac{3}{2} \leqslant x + 1 \leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$. Comme $\dfrac{2}{3} < 1$, on en déduit que $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (c) La fonction f est bien sûr dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

En reprenant la question précédente, si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, on a $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{2}{3}$, donc en élevant au carré (tout est positif), $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{(x+1)^2} \leqslant \frac{4}{9}$, soit $\frac{1}{2} \leqslant |f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$.

(d) Commençons par prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$: $u_0 = 1$ appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Supposons désormais que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, alors d'après les questions précédentes $\frac{1}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$, soit $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la récurrence.
Constatons par ailleurs que r_2 est un point fixe de la fonction f : on sait que r_2 vérifie $r_2^2 + r_2 - 1 = 0$, soit $r_2(r_2+1) = 1$, donc $r_2 = \frac{1}{r_2+1}$ ou encore $f(r_2) = r_2$.
On peut désormais appliquer l'IAF à u_n et r_2, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (cf questions précédentes), sur lequel on a vu que $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$. On en déduit que $|f(u_n) - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|$, soit $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|$.
Montrons enfin par récurrence la propriété $P_n : |u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Pour $n = 0$, $|u_0 - r_2| = |1 - r_2| \leqslant 1$ car $r_2 \in]0;1[$, ce qui prouve P_0. Si on suppose P_n vérifiée, on peut faire le calcul suivant en utilisant successivement le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2| \leqslant \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Cette dernière inégalité prouve P_{n+1} et achève donc la récurrence.
Comme $\frac{4}{9} < 1$, la suite $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge vers 0, et le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - r_2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = r_2$.

2. (a) Cette fois-ci, on ne sait pas résoudre l'équation, il faut donc étudier un peu le polynôme $x^3 + x^2 + x - 1$. Sa dérivée, $3x^2 + 2x + 1$, a un discriminant négatif, elle est donc toujours positive. La fonction $x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est donc strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}$. Comme elle prend la valeur -1 pour $x = 0$ et la valeur 2 pour $x = 1$, on en déduit qu'elle s'annule entre 0 et 1. L'équation proposée a donc une unique solution (à cause de la bijectivité) qui appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

(b) Le trinome $x^2 + x + 1$ étant strictement croissant sur $\mathbb{R}^+$, on aura, si $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1} < 1$, on aura bien $\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc l'intervalle est stable.

(c) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ayant un discriminant négatif, il ne s'annule jamais), et $g'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, et en dérivant g' comme un produit,
$$g''(x) = -\frac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3}$$
$= \frac{8x^2 + 8x + 2 - 2x^2 - 2x - 2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. Cette dérivée seconde étant toujours positive sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, la dérivée g' y est strictement croissante. Comme $g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}+1}{(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1)^2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \frac{135}{169}$ et $g'(1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, on peut en déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $|g'(x)| \leqslant \frac{135}{169}$.

(d) On aimerait appliquer l'IAF à r_3 et à v_n en utilisant la majoration de $|f'(x)|$ obtenue à la question précédente. Il faut pour cela vérifier que v_n est toujours dans cet intervalle, ce qui se fait en utilisant la stabilité de l'intervalle par une récurrence identique à celle du début la question 1.d, et que $r_3 \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ et est un point fixe de g. Comme $\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{14}{27} < 0$, on a effectivement $r_3 \geqslant \frac{1}{3}$ (cf étude de la question a). De plus, $r_3^3 + r_3^2 + r_3 - 1 = 0 \Rightarrow r_3(r_3^2 + r_3 + 1) = 1 \Rightarrow r_3 = f(r_3)$, donc r_3 est un point fixe de f. On peut donc bien appliquer l'IAF pour obtenir $|f(v_n) - f(r_3)| \leqslant \frac{135}{169}|v_n - r_3|$, soit $|v_{n+1} - r_3| \leqslant \frac{135}{169}|v_n - r_3|$.

On fait ensuite notre petite récurrence classique pour prouver que $|u_n - r_3| \leqslant \left(\frac{135}{169}\right)^n$ (comme dans la question 1.d, on majore $|v_0 - r_3|$ par 1 en utilisant que $\frac{1}{3} \leqslant r_3 \leqslant 1$, et le reste de la récurrence est identique en remplaçant les $\frac{4}{9}$ par des $\frac{135}{169}$).

La conclusion est également la même : $\frac{135}{169} < 1$ donc le membre de droite de notre inégalité tend vers 0, et en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} |v_n - r_3| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = r_3$.

3. (a) La fonction h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $h_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$. La fonction h_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle y est bijective. Comme $h_n(0) = -a < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h_n(x) = +\infty$, on en déduit que l'équation $h_n(x) = 0$ a bien une solution (unique par bijectivité) sur $[0, +\infty[$. De plus, on a $h_n(1) = n - a$, donc $h_n(1) > 0$ si $n > a$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, h_n s'annule alors sur l'intervalle $]0, 1[$ et $t_n \in]0, 1[$.

   (b) C'est un simple calcul : $(x-1)h_n(x) = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x^3 + x^2 - ax - x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x + a = x^{n+1} - ax - x + a = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

   (c) Notons que $h_{n+1}(x) = x^{n+1} + h_n(x)$. Comme $h_n(t_n) = 0$ (par définition), on a donc $h_{n+1}(t_n) = t_n^{n+1} > 0$, donc $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$. Comme par ailleurs on a aussi, toujours par définition, $h_{n+1}(t_{n+1}) = 0$, on en déduit que $h_{n+1}(t_n) > h_{n+1}(t_{n+1})$. La fonction h_{n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, cela implique $t_n > t_{n+1}$, et la suite (t_n) est donc strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle est donc convergente.

   (d) On vient de voir que la suite (t_n) était décroissante, donc $\forall A \geqslant n$, $0 < t_n \leqslant t_A$, et comme t_n et t_A sont tous deux strictement inférieurs à 1, $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$. Fixons donc $A \geqslant a$ (de façon à ce que t_A soit une constante). Comme $t_A < 1$ dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} t_A^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n^n = 0$.

   (e) En reprenant la relation obtenue à la question b et en l'appliquant pour $x = t_n$, on obtient $0 = t_n^{n+1} - (a+1)t_n + a$, soit $(a+1)t_n - a = t_n \times t_n^n$. Le membre de droite convergeant vers 0 d'après la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a+1)t_n - a = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \frac{a}{a+1}$.

4. (a) Tout comme pour la fonction h_n, i_n est dérivable de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc y est strictement croissante et bijective. Comme $i_n(0) = -a < 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} i_n(x) = +\infty$, la fonction s'annule nécessairement une unique fois sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $i_n(1) = n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 - a = \frac{n(n+1)}{2} - a$. Si $n(n+1) > 2a$, on aura donc $i_n(1) > 0$, et la fonction i_n s'annulera alors sur $]0, 1[$.

   (b) Encore du calcul : $(x-1)^2 i_n(x) = (x^2 - 2x + 1)\sum\limits_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum\limits_{k=1}^{k=n} kx^{k+2} - \sum\limits_{k=1}^{k=n} 2kx^{k+1} + \sum\limits_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum\limits_{k=3}^{k=n+2} (k-2)x^k - \sum\limits_{k=2}^{k=n+1} (2k-2)x^k + \sum\limits_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 =$

$(n-1)x^{n+1}+nx^{n+2}-2x^2-2nx^{n+1}+x+2x^2-a(x-1)^2 = nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x-a(x-1)^2$.

(c) Même chose qu'à la question 3.c en constatant que $i_{n+1}(x) = i_n(x) + (n+1)x^{n+1}$, donc $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. On en déduit que $i_{n+1}(y_n) > 0$, soit $i_{n+1}(y_n) > i_{n+1}(y_{n+1})$ puis, par croissance de la fonction i_{n+1}, $y_n > y_{n+1}$. La suite (y_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge.

(d) Encore une fois, la décroissance de la suite donne immédiatement l'inégalité, et en fixant A à une valeur convenable, on sait que $y_A < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_A^n = 0$ (un petit coup de croissance comparée ici) et, par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n^n = 0$.

Reprenons alors la relation de la question b, appliquée à $x = y_n$, pour en déduire en passant à la limite que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n + a(y_n-1)^2 = 0$, soit $\beta - a(\beta-1)^2 = 0$, soit $a\beta^2 - (1+2a)\beta + a = 0$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = (1+2a)^2 - 4a^2 = 1+4a$, qui est toujours positif, et admet donc deux racines $\beta_1 = \dfrac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2a}$, et $\beta_2 = \dfrac{1+2a-\sqrt{1+4a}}{2a}$. Reste à savoir laquelle des deux valeurs est la bonne. On sait que $0 \leqslant \beta < 1$. Or, $\beta_1 > 1$ (son numérateur est plus grand que son dénominateur). On a donc $\beta = \dfrac{1+2a-\sqrt{1+4a}}{2a}$.

Problème 2 (***)

1. Mon tout bête programme maison (j'ai rajouté un troisième paramètre n correspondant au nombre de termes calculés) :

```
import matplotlib.pyplot as plt
def logistique(x,k,n) :
    abscisses=[i/1000.0 for i in range(1001)]
    def f(a) :
        return k*a*(1-a)
    ordonnees=[f(i) for i in abscisses]
    plt.plot(abscisses,abscisses)
    plt.plot(abscisses,ordonnees)
    l1=[x]
    l2=[0]
    for i in range(n) :
        y=f(x)
        l1.append(x)
        l2.append(y)
        l1.append(y)
        l2.append(y)
        x=y
    plt.plot(l1,l2)
    return l1
```

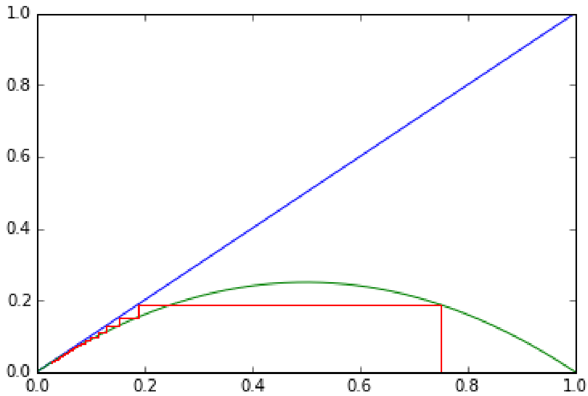
2. (a) On a donc pour l'instant $f(x) = x(1-x) = x - x^2$. La fonction est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $f'(x) = 1-2x$, et on peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
$f(x)-x$	0	$+$		$+$	

Le signe de $f(x) - x$ est ici évident, le seul point fixe est $x = 0$.

(b) L'intervalle $[0, 1]$ étant stable par f (d'après le tableau de variations précédent, on a $f([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{4}\right] \subset [0, 1]$), on aura toujours $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ (récurrence évidente), et donc toujours $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leqslant 0$. La suite est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Comme 0 est le seul point fixe de f, on a nécessairement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Une illustration (issue de mon programme Python) lorsque $u_0 = \dfrac{3}{4}$:



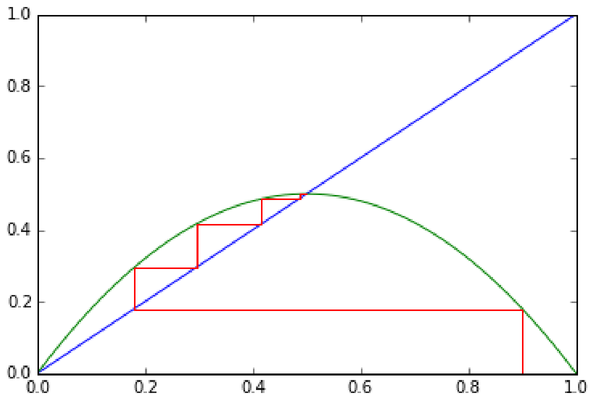
3. (a) Cette fois-ci, $f(x) = 2x - 2x^2$, et $f'(x) = 2 - 4x$. En fait, on peut d'ores et déjà constater que le signe de $f'(x)$ ne dépend absolument pas de la valeur de k, seul le maximum de la fonction changera, ainsi que le signe de $f(x) - x$. Ici, $f(x) - x = x - 2x^2$ s'annule quand $x = 0$ et quand $x = \dfrac{1}{2}$, avec un signe positif entre ces deux racines, d'où le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$f(x)-x$	0	$+$	0	$-$	

(b) Si $u_0 = 0$, la suite sera constante égale à 0 puisqu'il s'agit d'un poin fixe. Si $u_0 = 1$, on aura $u_1 = f(1) = 0$, et la suite va donc stationner à 0 à partir du rang 1.

(c) La stabilité de l'intervalle est évidente vues les variations de f : la fonction est croissante et 0 et $\dfrac{1}{2}$ sont deux points fixes, donc $f\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Si u_0 se trouve dans cet intervalle, ce sera donc aussi le cas de tous les autres termes de la suite (récurrence triviale), et on aura $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$, donc la suite est croissante. Étant majorée par $\dfrac{1}{2}$, elle converge donc, et sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$ (on ne peut pas converger vers 0 en partant de $u_0 > 0$ pour une suite croissante).

(d) Dans ce cas, $u_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, et la suite devient donc croissante à partir du rang 1, et convergera de même vers $\frac{1}{2}$. Une illustration, cette fois en partant de $u_0 = \frac{9}{10}$:



4. (a) Les variations n'ont toujours pas changé, le maximum de f valant maintenant 1. Les points fixes sont désormais obtenues en résolvant l'équation $3x - 4x^2 = 0$, donc on a comme points fixes $x = 0$ et $x = \frac{3}{4}$. De plus, $f'(0) = 4$ (cette valeur ne sera pas vraiment utilisée par la suite, mais le fait qu'elle soit (largement) plus grande que 1 explique que 0 est un point fixe répulsif, donc que la suite (u_n) ne va pas pouvoir tendre vers 0, sauf dans le cas d'une suite stationnaire.

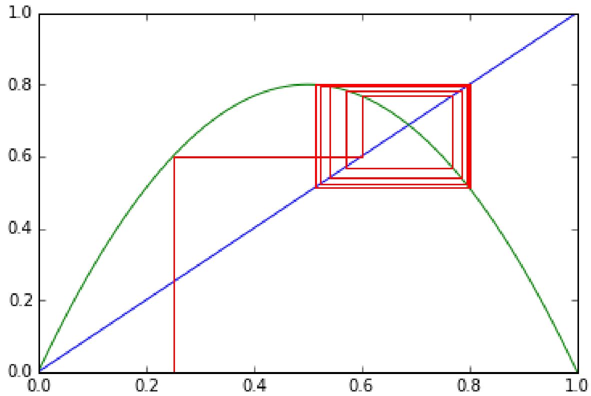
(b) En effet, le signe de $f(x) - x$ est, comme précédemment, positif entre les deux points fixes, donc sur tout l'intervalle $\left[0, \frac{3}{4}\right]$. L'énoncé était imprécis, si on veut une inégalité stricte $f(x) > x$, il faut bien sûr prendre un intervalle ouvert du côté de 0. Par l'absurde, supposons donc que la suite (u_n) tende vers 0 en ne prenant jamais la valeur 0. Alors, en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura toujours $0 < u_n \leqslant \frac{1}{2}$. Mais dans ce cas, $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$, donc la suite est strictement croissante à partir du rang n_0. On a donc nécessairement $u_n > u_{n_0} > 0$, ce qui est contradictoire avec une limite nulle (si (u_n) converge, sa limite sera supérieure ou égale à u_{n_0}). Notre hypothèse est donc impossible : si (u_n) tend vers 0, c'est qu'on aura nécessairement $u_{n_0} = 0$ pour un certain entier n_0.

(c) C'est déjà le cas si $u_0 = 0$ (suite constante) ou $u_0 = 1$ (suite stationnaire à 0 à partir du rang 1). Mais cela se produira aussi si $u_0 = \frac{1}{2}$, puisque dans ce cas $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, puis la suite devient stationnaire à 0 à partir du rang 2. Ce sera aussi le cas si u_0 est un antécédent de $\frac{1}{2}$, ou un antécédent de cet antécédent etc. Or, tout nombre compris entre 0 (exclus) et 1 admet un antécédent par f qui est strictement positif et strictement plus petit que lui, ce qui permet de construire de proche en proche une infinité de valeurs de u_0 pour lesquelles la suite va finir par prendre la valeur 1, puis stationner à 0. Concrètement, en notant g la réciproque de la fonction f restreinte à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, g effectue une bijection de $]0, 1]$ vers $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. La suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = g(v_n)$ prendra des valeurs toutes distinctes et qui correspondent toutes à des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite stationne à 0.

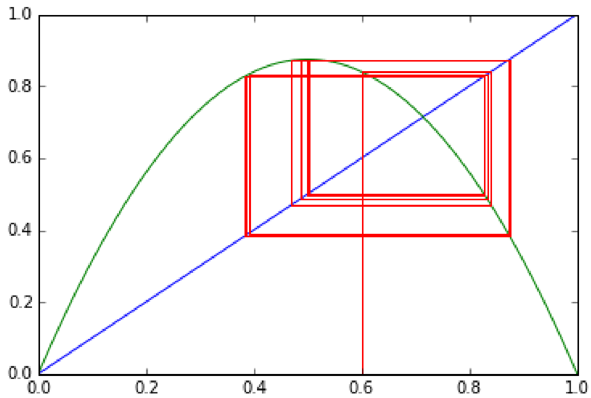
(d) Dans ce cas, $u_1 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \left(2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 = \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ en exploitant la formule de duplication bien connue $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$. Le même calcul montre que $u_2 = \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, mais en fait $u_2 = u_0$ puisque $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. La suite sera donc périodique de période 2.

(e) Non, sûrement pas, puisque l'intervalle $[0, 1]$ reste stable par f, donc tous les termes de la suite vont rester dans l'intervalle $[0, 1]$ (toujours la même récurrence triviale). Une suite bornée ne peut pas avoir une limite infinie.

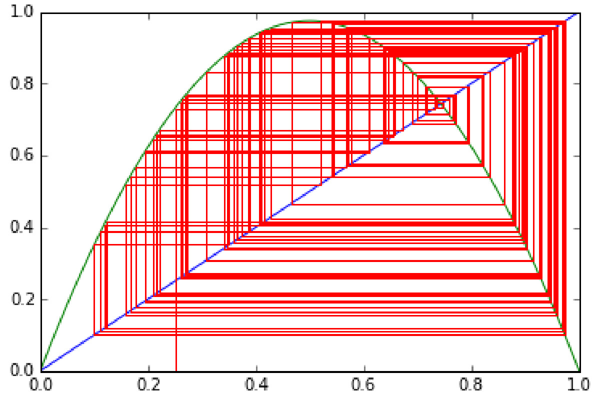
Quelques exemples supplémentaires avec des valeurs de k non entières, en pratique le comportement de la suite devient de plus imprévisible quand k varie dans l'intervalle $[3, 4]$ (pour $k < 3$, la suite va toujours converger vers un de ses points fixes, puis on voit apparaitre progressivement des « cycles » de période 2, puis de période 4 puis des choses de plus en plus étranges quand on est en gros dans l'intervalle $[3.75, 4]$ pour le paramètre k). Par exemple, pour $u_0 = \frac{1}{4}$ et $k = 3.2$, on a un cas typique de « rapprochement d'une suite périodique de période 2 » :



Avec $u_0 = 0.6$ et $k = 3.5$, on se rapproche très vite d'un cycle de période 4 (sur ce graphique et les deux qui l'entourent, on a représenté les 100 premiers termes de la suite et pas seulement les 30 premiers) :



Enfin, un cas typique de « chaos total » quand $u_0 = \frac{1}{4}$ et $k = 3.9$:



5. (a) Les variations de f sont toujours les mêmes, mais le maximum est désormais de valeur $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 1$ pour déterminer l'intervalle sur lequel on va « déborder ». L'équation $6x^2 - 6x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 24 = 12$ et admet donc pour racines $x_1 = \frac{6 - \sqrt{12}}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$, et $x_2 = \frac{6 + \sqrt{12}}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Ces deux valeurs sont bien comprises entre 0 et 1, et $f(x) > 1$ si $x \in]x_1, x_2[$.

   (b) Si u_0 appartient à cet intervalle, on aura $u_1 > 1$ et donc $u_2 < 0$. Or, l'intervalle $]-\infty, 0[$ est stable par f, et sur cet intervalle on a toujours $f(x) < x$. La suite va donc être à valeurs négatives à partir du range 2 (récurrence triviale), et strictement décroissante à partir de u_2. Comme il n'existe pas de point fixe strictement négatif, la suite ne peut pas être minorée (sinon elle convergerait), donc elle tend nécessairement vers $-\infty$.

   Montrer que, pour toutes ces valeurs initiales, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

   (c) C'est le même principe que plus haut : si $u_0 = x_1$ ou $u_0 = x_2$, la suite va stationner à 0 à partir du rang 2. Mais si u_0 est un antécédent de x_1, ou un antécédent de cet antécédent etc, ce sera pareil (on stationnera seulement un peu plus tard). Or, comme précédemment, tout nombre α compris entre 0 et 1 amdet toujours un antécédent dans l'intervalle $]0, \alpha[$, on conclut exactement de la même façon.

   (d) Le point fixe en question vaut $\frac{5}{6}$, mais comme Python arrondit la valeur, il finit par s'éloigner de la suite constante qu'on devrait théoriquement avoir, et même au point de finir par se retrouver en-dessous de 0, et donc de donner des valeurs divergeant vers $+\infty$. Le même phénomène se produit si on prend par exemple $u_0 = x_1$.