Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 13 : Dérivation

MPSI Lycée Camille Jullian

27 janvier 2026

Exercice 1 (* à **)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et étudier l'existence de tangentes (éventuellement verticales) aux points posant problème. On essaiera également, lorsque c'est possible, d'étudier les variations de la fonction et d'en tracer une allure de courbe représentative.

- $f_1(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$
- $f_2(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
- $f_3(x) = (x^2 - 1)\arccos(x^2)$
- $f_4(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
- $f_5(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$
- $f_6(x) = xe^{\frac{1}{\ln(x)}}$
- $f_7(x) = x\sqrt{x+x^2}$
- $f_8(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$
- $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $f_{42}(x) = \sqrt{1 - 2x\sqrt{1-x^2}}$
- $f_{10}(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 2 (*)

Soient $a < b$ deux réels strictement positifs, montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 (*)

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$. Étudier le plus complètement possible la fonction f (prolongement par continuité, variations, convexité, existence de points d'inflexion et calcul des tangentes en ces points), puis tracer une allure soignée de sa courbe représentative.

Exercice 4 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{2n}$. Calculer la dérivée n-ème de f de deux façons différentes (directement, et à l'aide de la formule de Leibniz en écrivant f sous forme de produit), puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 5 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. À quelle condition la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$ est-elle dérivable en a ? Donner dans ce cas l'expression de $g'(a)$.

Exercice 6 (**)

Soit $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
2. En déduire que la courbe de f admet une tangente passant par l'origine autre que celle en 0.

Exercice 7 (***)

Soit f la fonction définie (et $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où P_n est un polynôme dont on précisera le degré. On donnera également une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
2. Calculer P_1, P_2 et P_3, et déterminer leurs racines (si possible).
3. En appliquant la formule de Leibniz à l'égalité $(1+x^2)f(x) = 1$, montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$.
4. En déduire que $P'_n(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.
5. Les polynômes P_n peuvent-ils avoir des racines réelles multiples (indication : un théorème qu'on verra dans le prochain chapitre affirme que a est racine double d'un polynôme P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$, puis a est racine triple si de plus $P''(a) = 0$, et ainsi de suite) ?

Exercice 8 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x^2)^n$, où n est un entier naturel non nul. Montrer que $f^{(n)}$ est un polynôme de degré n admettant exactement n racines simples réelles comprises entre -1 et 1 (une récurrence pourrait être utile, mais pas forcément sur l'entier n).

Exercice 9 (**)

On considère la fonction f définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ (sur tout l'intervalle $[0,1[$).

Exercice 10 (**)

Le but de cet exercice est de déterminer les triangles ABC d'aire maximale inscrits dans le cercle trigonomtrique. Soit donc un tel triangle pour lequel A et B appartiennent tout deux à la droite horizontale d'équation $y = k$, avec $k \in [-1,1]$ (on peut faire cette supposition sans perte de généralité).

1. Déterminer l'aire maximale possible pour le triangle ABC sous cette hypothèse, qu'on notera $f(k)$.
2. Conclure.

Exercice 11 (**)

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $f'(x)(g(b)-g(a)) = g'(x)(f(b)-f(a))$.
2. En déduire la règle de l'Hôpital : Si f et g s'annulent toutes les deux en un point a, sont continues et dérivables au voisinage de a (sauf éventuellement en a pour la dérivabilité), ne s'annulent pas au voisinage de a, et vérifient $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
3. En déduire les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 12 (**)

Soit f une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$, $\forall x \geqslant A$, $|f'(x) - l| \leqslant \varepsilon$.
2. En déduire que, $\forall x \geqslant A$, $|f(x) - lx| \leqslant \varepsilon(x-A) + |f(A) - Al|$.
3. Montrer que, si $l \neq 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{lx} = 1$.

Exercice 13 (***)

On souhaite démontrer dans cet exercice le classique théorème de Darboux : une fonction dérivée vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires (même si elle n'est pas continue). Supposons donc f dérivable sur un segment $[a,b]$.

1. Supposons $f'(a) \geqslant 0$ et $f'(b) \leqslant 0$, montrer l'existence d'un réel $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Refaire la question précédente dans le cas où $f'(a) \leqslant 0$ et $f'(b) \geqslant 0$.
3. Démontrer le théorème de Darboux.
4. En déduire qu'il existe des fonctions non continues qui vérifient le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 14 (***)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)(1 - f(x)f(y)) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = f'(0)$.
3. Montrer qu'il existe deux constantes a et b telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(f(x)) = ax + b$.
4. En déduire que f est constante, et conclure.

Exercice 15 (** à ***)

Démontrer les diverses inégalités suivantes (questions indépendantes) :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{x^2 + (x+1)^2} \geqslant 2$.
2. $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ (on pourra étudier la convexité de la fonction $-\ln$ pour commencer).
3. $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^3 > \cos(x)$.
4. si a_1, a_2, …, a_n sont n réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}$.

Exercice 16 (**)

1. Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$.
2. Montrer que, pour tous réels stritement positifs x_1, x_2, …, x_n, on a $1 + \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)}$ (bien entendu, on devrait pouvoir exploiter le résultat de la question précédente).
3. Montrer que, pour tous réels strictement positifs x_1, x_2, …, x_n, y_1, …, y_n, on a $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k} + \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} y_k} \leqslant \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)}$.

Exercice 17 (***)

On définit une fonction f sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Le but de l'exercice est d'étudier les dérivées successives de la fonction f.

1. Calculer $f''(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

2. On souhaite prouver, pour tout entier naturel n, l'existence de deux polynômes P_n et Q_n tels que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$. Donner les expressions des polynômes P_n et Q_n pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$. Quelle relation simple semble-t-on observer entre les polynômes P_n et Q_n ?
3. Démontrer par récurrence l'existence des polynômes P_n et Q_n. On déterminera lors de cette récurrence une expression de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n
4. Montrer que P_n et Q_n sont des ponynômes à coefficients entiers. Précisez le degré, la parité et le coefficient dominant de ces polynômes.
5. Calculer P_3 et Q_3 à l'aide des relations de récurrence obtenues plus haut.
6. Montrer que, si U et V sont deux polynômes vérifiant $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$ pour tout $x > 0$, alors $U = V = 0$.
7. En appliquant la formule de Leibniz à l'égalité $xf(x) = \sin(x)$, obtenir deux nouvelles relations entre P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.
8. En déduire que $P_n' = Q_n$, et montrer que P_n est solution d'une équation différentielle très simple du second ordre.
9. En notant $p = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, justifier que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^{n-2k}$, avec $a_k \in \mathbb{R}$, et déterminer une expression de a_k faisant intervenir un quotient de factorielles.
10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = x^n$, où n est un entier naturel quelconque.

Exercice 18 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1, 2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?

Exercice 19 (**)

On considère la fonction f définie sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudiez les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Étudiez sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$, en déduire que $\forall x \in]1, +\infty[$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 20 (***)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. Quelle est sa parité ?

2. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, et que son prolongement est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (en cas de grosse difficulté, on pourra appliquer la règle de l'Hôpital, objet d'étude de l'exercice 11). Préciser les valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$.
3. Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$, on note α sa solution. Vérifier que $\alpha \in]0,1[$ et calculer $\mathrm{ch}(\alpha)$.
4. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{ch}(t) - t$, puis prouver que $\forall t \geqslant 0$, $0 \leqslant t\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t) \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}^2(t)$.
5. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer la nature de la suite (u_n).

Problème 1 (***)

Le but de ce problème est d'étudier numériquement les solutions d'équations du type $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = a$.

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$.

   On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

   (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine dans l'intervalle $]0,1[$ et préciser la valeur de cette racine, qu'on notera désormais r_2.

   (b) Montrer que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $f(x) \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

   (c) Calculer la dérivée f' de f et prouver que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

   (d) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$, et en déduire la convergence de (u_n).

2. **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

   On considère désormais la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

   (a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une unique solution r_3 appartenant à $]0,1[$.

   (b) Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$ est stable par g.

   (c) Calculer les dérivées g' et g'' et déterminer le maximum de $|g'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$.

   (d) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Majorer $|v_n - r_3|$ en fonction de n, et prouver la convergence de (v_n) vers r_3.

3. **Racine positive de l'équation** $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$.

   On désigne désormais par a un réel strictement positif, et on note, pour tout entier $n \geqslant 2$, h_n la fonction définie par $h_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

   (a) Montrer que sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ possède une unique racine qu'on notera t_n, puis que $t_n \in]0,1[$ si $n > a$.

   (b) Montrer que $(x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

   (c) Montrer que $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$, et en déduire que la suite (t_n) est strictement décroissante, puis qu'elle converge vers une limite qu'on notera désormais α.

   (d) Montrer que, si $A \in \mathbb{N}$, on aura $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$ si $n \geqslant A$. En déduire, en choisissant $A > a$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n^n = 0$.

   (e) Exprimer la limite α en fonction de a.

4. **Racine positive de l'équation** $nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0$.

   On note dans cette partie $i_n(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a$.

   (a) Montrer que l'équation $i_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $]0, +\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $]0,1[$ si $n(n+1) > 2a$. On notera cette solution y_n.

   (b) Prouver la relation $(x-1)^2 i_n(x) = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.

   (c) Montrer que $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. En déduire la décroissance de la suite (y_n), et sa convergence vers un réel $\beta \in [0,1[$.

   (d) Montrer que $0 \leqslant ny_n^n \leqslant ny_A^n$ dès que $n \geqslant A$, où $A(A+1) \geqslant 2a$. En déduire la limite de la suite (ny_n^n), puis déterminer β en fonction de a.

Problème 2 : un classique des suites récurrentes.

On va s'intéresser dans cet exercice à toutes les suites définies par des relations de récurrence du type $u_{n+1} = ku_n(1-u_n)$, avec $u_0 \in [0,1]$ et k un réel positif fixé. En pratique, on se contentera d'une étude dans les cas particuliers $k=1$, $k=2$, $k=4$ et $k=6$, mais les cas intermédiaires auraient des comportements assez similaires. On notera dans tout l'exercice $f(x) = kx(1-x)$, la fonction f étant donc différente d'une question à l'autre puisque la valeur de k va changer.

1. Écrire une fonction Python prenant comme paramètres un réel u (qui correspondra à la valeur initiale de la suite) et un autre réel k et qui trace dans un même repère (à l'aide du module matplotlib.pyplot) la représentation graphique de la fonction f (avec la valeur de k choisie par l'utilisateur), la droite $y = x$ et les 30 premiers termes de la suite (u_n) lorsque $u_0 = u$. Si vraiment on est trop mauvais en Python pour y arriver, on se contentera de faire un dessin dans chacun des cas étudiés.
2. Étude du cas $k = 1$.
   (a) Étudier la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$, en précisant les points fixes éventuels et le signe de $f(x) - x$ (un petit graphique ne fera pas de mal même si on a fait le programme Python demandé à la question précédente).
   (b) Montrer que, quelle que soit la valeur de u_0, la suite (u_n) est monotone et convergente, et préciser sa limite.
3. Étude du cas $k = 2$.
   (a) Étudier la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$, en précisant les points fixes éventuels et le signe de $f(x) - x$ (là encore, un petit graphique aidera).
   (b) Que se passe-t-il lorsque $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$?
   (c) Montrer que l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f. En déduire que, si $u_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, la suite (u_n) sera monotone et convergera.
   (d) Que se passe-t-il si $\frac{1}{2} < u_0 < 1$?
4. Étude du cas $k = 4$.
   (a) Déterminer les variations (toujours sur $[0,1]$) et points fixes de f, ainsi que la valeur de $f'(0)$.
   (b) Montrer que, si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) > x$. En déduire que la suite (u_n) ne peut converger vers 0 que s'il existe un entier n pour lequel $u_n = 0$ (question difficile).
   (c) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) va être stationnaire et converger vers 0 (question assez difficile également).
   (d) Montrer que, si $u_0 = \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$, la suite (u_n) est périodique (la période n'est pas grande...) et donc ne converge pas.
   (e) La suite (u_n) peut-elle tendre vers $\pm\infty$ (en supposant comme toujours $u_0 \in [0,1]$) ?

   On peut en fait prouver que, pour $k = 4$, si on exclut l'infinité de valeurs initiales pour lesquelles la suite sera stationnaire (égale à 0 ou à $\frac{3}{4}$ à partir d'un certain rang), la suite ne converge jamais, mais qu'on peut « converger vers une suite périodique », c'est-à-dire par exemple que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) peuvent converger vers deux limites différentes correspondant à des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite serait périodique de période 2.
5. Étude du cas $k = 6$.
   (a) Déterminer les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[0,1]$ pour lesquelles $f(x) \notin [0,1]$.
   (b) Montrer que, pour toutes ces valeurs initiales, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
   (c) Montrer qu'il existe cependant une infinité de valeurs initiales pour lesquelles la suite converge.
   (d) Tester votre programme Python avec pour valeur initiale une valeur pour laquelle la suite est censée converger (par exemple la valeur du point fixe autre que 0) et constater que Python n'est pas vraiment infaillible.