Devoir de rentrée : corrigé

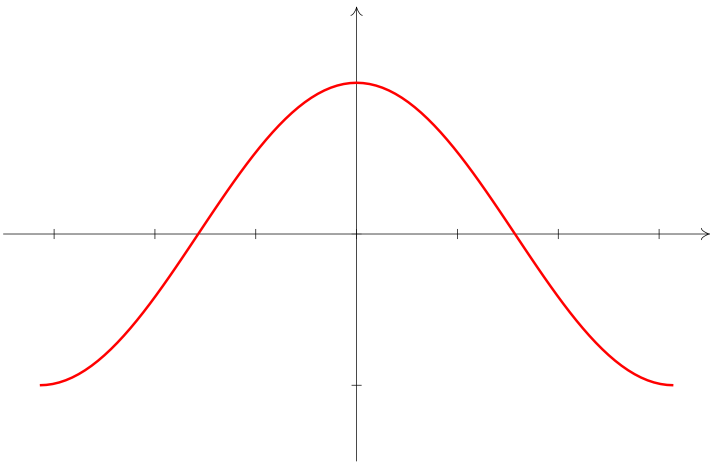
MPSI Lycée Camille Jullian

1er septembre 2025

1. Avant de faire quoi que ce soit, il faut préciser que cette inéquation ne peut avoir de sens que si toutes les expressions à l'intérieur des logarithmes sont strictement positives, donc si $x > 2$. À cette condition seulement, on peut regrouper et passer à l'exponentielle pour obtenir l'inéquation équivalente $(x+2)(x-2) \leqslant 4$, soit $x^2 \leqslant 8$. On n'oublie pas la condition nécessaire $x > 2$ et on conclut donc que $\mathcal{S} =]2, 2\sqrt{2}]$.
2. Non, puisqu'ils sont tous les deux divisibles par 3 (et par 7 accessoirement). Si ça ne vous saute pas aux yeux, faites simplement la décomposition en facteurs premiers des deux entiers : $84 = 2 \times 42 = 2^2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$, et $189 = 3 \times 63 = 3^2 \times 7$, ce qui confirme que leur pgcd vaut 21, ils ne sont pas du tout premiers entre eux.
3. Là encore, le plus simple est de décomposer en facteurs premiers les entiers sous les racines carrées : $4000 = 2^2 \times (2 \times 5)^3 = 2^5 \times 5^3$, et $1440 = 12^2 \times 10 = 2^4 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 2^5 \times 3^2 \times 5$, donc $A = \dfrac{3 \times 2^2 \times 5 \times \sqrt{2 \times 5}}{2 \times 2^2 \times 3 \times \sqrt{2 \times 5}} = \dfrac{5}{2}$.
4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$.
5. Comme je ne sais pas quelle méthode et quelle rédaction sont standard au lycée, je vous donne celles qu'on verra ensemble cette année (et le vocabulaire qui va avec). Les solutions de l'équation homogène associée $y' = 2y$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{2x}$, avec $K \in \mathbb{R}$, et la fonction constante égale à $\dfrac{3}{2}$ est solution particulière de l'équation complète. Les solutions de l'équation proposée sont donc toutes les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{2x} + \dfrac{3}{2}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
6. Il suffit de connaître les valeurs des lignes trigonométriques des angles remarquables (et de dessiner un petit cercle trigonométrique au brouillon si besoin), les solutions sont de la forme $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
7. Il en existe une seule : si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors $u_7 = u_2 \times q^5$, donc $q^5 = -6$, équation qui n'a qu'une solution réelle (la fonction $x \mapsto x^5$ est bijective et prend exactement une fois chaque valeur réelle).
8. Si trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) vérifient les conditions suivantes :
   - $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang
   - (u_n) et (w_n) sont deux suites convergentes ayant la même limite l

   alors la suite (v_n) converge également vers l.
9. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-5, 1, 5)$ et $\overrightarrow{BC} = (-3, -3, 3)$. On constate alors que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 - 12 + 6 = 0$, ce qui prouve que le triangle est bel et bien rectangle en B. Alternativement, on peut calculer les longueurs des côtés et appliquer la réciproque du théorème de Pythagore mais c'est plus long.
10. L'inéquation est vérifiée si $x^2 - 4 > 2$ ou si $x^2 - 4 < -2$, donc si $x^2 > 6$ ou $x^2 < 2$. Autrement dit, $\mathcal{S} =]-\infty - \sqrt{6}[\cup] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{6}, +\infty[$.

11. Il est évidemment interdit de se tromper dans ce genre de calcul : $f'(x) = -\dfrac{6}{x^4}$.
12. Commençons par mettre ce nombre sous forme alébrique en multipliant en haut et en bas par le conjugué du dénominateur : $z = \dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i$. Pour obtenir la forme exponentielle, on constate que $|z| = \sqrt{2}$, donc $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
13. Le plus simple est de dériver deux fois : $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$, puis $f''(x) = (2+x)e^x$, qui est du signe de $2+x$. La fonction f est donc concave sur $]-\infty, -2]$ et convexe sur $[-2, +\infty[$.
14. C'est normalement un résultat de croissance comparée classique $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$.
15. On est dans une situation de loi binômiale de paramètre $\left(5, \dfrac{3}{10}\right)$. On nous demande l'espérance de cette variable, qui vaut donc $5 \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{2}$.
16. Puisqu'il s'agit d'une loi binômiale c'est une formule du cours : la probabilité vaut $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^3 = \dfrac{9 \times 343}{10\ 000}$, qu'on va laisser gentiment sous cette forme.
17. Puisque e^x n'est jamais nul, l'équation est équivalente à $e^{2x} + 3 - 4e^x = 0$, puis à $X^2 - 4X + 3$ en effectuant le changement de variable $X = e^x$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et admet pour racines réelles $X_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. On n'oublie pas d'en déduire les valeurs de x correspondantes : $x_1 = \ln(1) = 0$ et $x_2 = \ln(3)$, donc $\mathcal{S} = \{0, \ln(3)\}$.
18. Une courbe à savoir refaire sans hésitation, bien entendu :



19. Cette droite a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$ (elle est perpendiculaire à une droite de coefficient directeur 2), donc a une équation de la forme $y = -\dfrac{1}{2}x + b$. Comme elle passe par le point A, on en déduit que $2 = \dfrac{1}{2} + b$, soit $b = \dfrac{3}{2}$, et l'équation recherchée est donc $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}$.
20. On effectue donc une IPP en posant $u(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $v'(x) = x^2$, donc $v(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ (il faut évidemment dériver le ln pour s'en débarasser), et $I = \left[\dfrac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \dfrac{1}{3}x^2\, dx = \dfrac{1}{3}e^3 - \left[\dfrac{1}{9}x^3\right]_1^e = \dfrac{1}{3}e^3 - \dfrac{1}{9}e^3 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{2e^3+1}{9}$.