Programme de colle n$^{\mathrm{o}}$ 18

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 23/02 au 27/02 2026

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 13 : Dérivation

- Dérivation, vocabulaire et formulaire :
  - taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ d'une fonction f en a, interprétation graphique comme pente de la droite reliant les points de la courbe d'abscisses a et $a+h$, définition de $f'(a)$ comme limite du taux d'accroissement, fonction dérivable en a et dérivable sur un intervalle I
  - dérivée à gauche ou à droite en a, demi-tangentes à la courbe quand les deux valeurs sont distinctes, existence de tangentes verticales en cas de limite infinie du taux d'accroissement
  - équation de la tangente en a à la courbe représentative de f, développement limité à l'ordre 1 de f en a (écrit sous la forme $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$)
  - démonstration des diverses formules de dérivation (**somme**, **produit**, **inverse**, quotient, composée, réciproque)
  - dérivées successives d'une fonction, notation $f^{(n)}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle, formule de Leibniz pour la dérivée n-ème d'un produit
- Théorèmes faisant intervenir la dérivation :
  - si f est dérivable sur $[a,b]$ et admet un extremum en $x \in]a,b[$, alors $f'(x) = 0$ (**démonstration** à connaître)
  - théorème de Rolle
  - théorème des accroissements finis (sa **démonstration** à l'aide du théorème de Rolle est à connaître)
  - application du TAF à l'étude des variations
  - théorème de prolongement de la dérivée (si f est dérivable sur $]a,b]$, continue en a et f' admet une limite l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$)
  - inégalité des accroissements finis (deux versions, une avec une hypothèse du type $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ sur un intervalle I, une autre où on a une hypothèse de majoration de $|f'|$)
- Étude de suites récurrentes :
  - vocabulaire de base (suite récurrente, intervalle stable par une fonction f, point fixe d'une fonction)
  - la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
  - utilisation de l'IAF pour démontrer la convergence et éventuellement obtenir des informations sur la vitesse de convergence d'une suite récurrente (u_n) (aucune connaissance

spécifique n'est exigée mais les élèves doivent connaître le fonctionnement global, et notamment savoir quand faire des récurrences)

- Convexité :
  - — définition à l'aide de l'inégalité de convexité $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$ si $t \in [0,1]$, position d'une courbe de fonction convexe par rapport à ses sécantes
  - — **inégalité de Jensen pour une fonction convexe** : $f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$ avec l'hypothèse $t_i \in [0,1]$ et $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$
  - — caractérisation de la convexité par croissance des pentes : f est convexe sur I si et seulement si tous les taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ sont croissants sur $I \backslash \{a\}$
  - — caractérisation de la convexité par la croissance de f' pour une fonction dérivable, position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes

Chapitre 15 : Polynômes.

- Vocabulaire : coefficient dominant, degré d'un polynôme, polynôme unitaire, notations $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
- Opérations de base sur $\mathbb{K}[X]$: somme, produit, composée, et propriétés élémentaires (degré d'un produit ou d'une composée notamment).
- Racines d'un polynôme :
  - — notion de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, **division euclidienne**
  - — **factorisation d'un polynôme par $X-a$ quand a est racine de P**, nombre maximal de racines pour un polynôme de degré n, principe d'identification des coefficients
  - — polynôme dérivé, multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide des polynômes dérivés, formule de Leibniz, polynômes scindés, théorème de d'Alembert-Gauss
  - — relations coefficients racines (sans forcément énoncer une formule générale, mais à savoir retrouver très rapidement pour un polynôme de degré 3 ou 4)
- l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ (hors division euclidienne) sera au programme uniquement la semaine prochaine.

Prévisions pour la semaine prochaine : polynômes (tout le chapitre), dénombrement.