

# Programme de colle n° 16

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 26/01 au 30/01 2026

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

## Chapitre 11 : Calcul matriciel.

- Calcul matriciel élémentaire :
  - définition des matrices et notation des ensembles de matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , vocabulaire de base (taille d'une matrice, matrices carrées, diagonales, triangulaires, matrices nulles, matrices identité  $I_n$ )
  - somme de matrices, produit d'une matrice par une constante, combinaisons linéaires de matrices, produit matriciel, propriétés (à savoir démontrer : **le produit d'une matrice  $A$  par une matrice identité de taille compatible est égal à  $A$** )
  - transposition, matrices symétriques et antisymétriques
  - puissances d'une matrice carrée, exemples de calculs de puissances à l'aide de suites récurrentes (typiquement en partant d'une relation du type  $A^2 = aA + bI_3$ ), matrices nilpotentes, utilisation de la formule du binôme matricielle pour le calcul de puissances
  - inversion de matrices : définition, propriétés élémentaires (unicité, inverse d'un produit de matrices inversibles), opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (et interprétation en termes de multiplication à gauche par des matrices de transvection ou de dilatation, même si les termes « transvection » et « dilatation » n'ont pas été donnés en cours), algorithme du pivot de Gauss d'inversion d'une matrice (uniquement dans la version pivot classique pour cette semaine, on évoquera les matrices augmentées et les liens avec les systèmes la semaine prochaine), exemples de calculs d'inverses exploitant un polynôme annulateur de la matrice
  - trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace,  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

## Chapitre 13 : Arithmétique.

- Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ , **théorème de division euclidienne**, nombres premiers (existence d'une infinité de nombres premiers, crible d'Eratosthène), congruences dans  $\mathbb{Z}$ .
- Pgcd, ppcm (y compris d'une famille d'entiers), notation  $n \wedge p$  et  $n \vee p$ , algorithme d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss (on doit être capable de calculer les coefficients de Bézout en

utilisant l'algorithme d'Euclide étendu), entiers premiers entre eux, premiers entre eux dans leur ensemble.

- Valuations  $p$ -adiques, additivité des valuations  $p$ -adiques, théorème de décomposition en facteurs premiers, calcul du pgcd et du ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premiers et formule  $(n \wedge p) \times (n \vee p) = n \times p$ , **petit théorème de Fermat**.

Prévisions pour la semaine suivante : arithmétique, un peu de dérivation (promis, cette fois ce n'est pas une blague).