Programme de colle n$^{\text{o}}$ 15

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 19/01 au 23/01 2026

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 10 : Continuité.

- Limites de fonctions :
  — définition des différents types de limites, régles de calcul, composition de limites
  — limites à gauche et à droite, existence de ces limites pour les fonctions monotones
  — caractérisation séquentielle de la limite (notamment utilisée pour prouver qu'une fonction du type $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0)
- Définition de la continuité en un point et sur un intervalle, stabilité par les différentes opérations usuelles, continuité à droite et à gauche, fonctions Lipschitziennes.
- **Théorème des valeurs intermédiaires** et conséquences (théorème de la bijection, théorème du maximum (ou des bornes atteintes), toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone)
- Méthode de dichotomie pour la détermination d'une valeur approchée d'une solution d'équation de la forme $f(x) = 0$ quand f est continue (la méthode a été vue sur un exemple, sans énoncer le moindre résultat théorique, notamment sur la vitesse de convergence des deux suites construites).
- Exemples d'étude de suites implicites. Aucun théorème spécifique à ce sujet, mais pour une suite définie par une condition du type $f_n(u_n) = 0$, on doit savoir :
  — majorer ou minorer la suite par un réel (ou même par une autre suite) en calculant l'image de ce réel par f_n
  — étudier la monotonie de la suite en passant par le signe de $f_{n+1}(u_n)$ ou de $f_n(u_{n+1})$
  — passer l'équation de définition de la suite à la limite pour obtenir la limite de la suite implicite, en exploitant éventuellement un raisonnement par l'absurde

Chapitre 11 : Calcul matriciel.

- Calcul matriciel élémentaire :

— définition des matrices et notation des ensembles de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vocabulaire de base (taille d'une matrice, matrices carrées, diagonales, triangulaires, matrices nulles, matrices identité I_n)
— somme de matrices, produit d'une matrice par une constante, combinaisons linéaires de matrices, produit matriciel, propriétés (à savoir démontrer : **le produit d'une matrice A par une matrice identité de taille compatible est égal à** A)
— transposition, matrices symétriques et antisymétriques
— puissances d'une matrice carrée, exemples de calculs de puissances à l'aide de suites récurrentes (typiquement en partant d'une relation du type $A^2 = aA + bI_3$), matrices nilpotentes, utilisation de la formule du binôme matricielle pour le calcul de puissances
— inversion de matrices : définition, propriétés élémentaires (unicité, inverse d'un produit de matrices inversibles), opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (et interprétation en termes de multiplication à gauche par des matrices de transvection ou de dilatation, même si les termes « transvection » et « dilatation » n'ont pas été donnés en cours), algorithme du pivot de Gauss d'inversion d'une matrice (uniquement dans la version pivot classique pour cette semaine, on évoquera les matrices augmentées et les liens avec les systèmes la semaine prochaine), exemples de calculs d'inverses exploitant un polynôme annulateur de la matrice
— trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Prévisions pour la semaine suivante : calcul matriciel, un peu de dérivation.