

TD n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

2 septembre 2025

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible les fonctions définies par les expressions suivantes :

1. Commençons par chercher les valeurs d'annulation du dénominateur pour déterminer le domaine de définition de la fonction f . Le trinôme $x^2 - x - 3$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 12 = 13$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \simeq 2.3$, et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \simeq -1.3$. On en déduit évidemment que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$.

Les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ se calculent de façon classique, en exploitant le « théorème des termes de plus haut degré » ou en faisant une factorisation des termes prépondérants au numérateur et au dénominateur de la fraction : $f(x) = \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2})} = \frac{1}{x} \times \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}$, forme sous laquelle ne subsiste plus de forme indéterminée puisque le quotient de droite tend vers 1. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Le calcul des autres limites de f nécessite essentiellement d'étudier son signe, ce qui se fait bien à l'aide d'un tableau de signes :

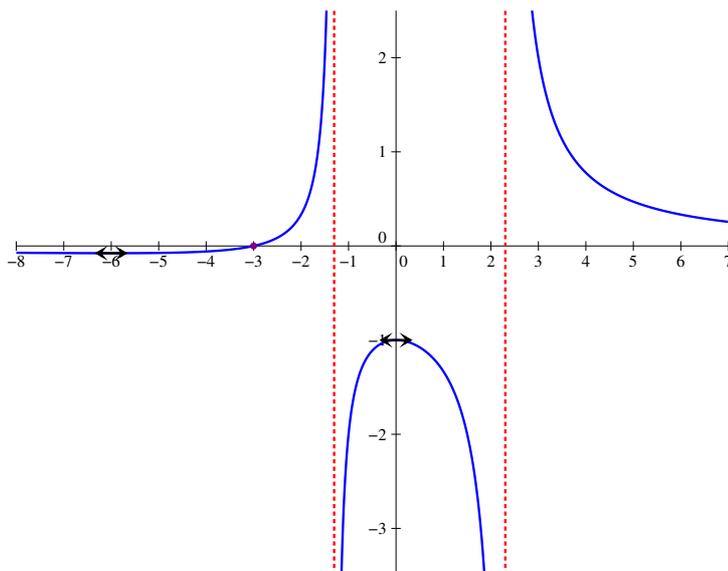
x	-3	x_1	x_2			
$x + 3$	-	\emptyset	+	+	+	
$x^2 - x - 3$	+	+	\emptyset	-	\emptyset	+
$f(x)$	-	\emptyset	+	-	+	

On peut maintenant par exemple calculer $\lim_{x \rightarrow x_1^-} x^2 - x - 3 = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) = +\infty$ (le numérateur ayant une limite finie strictement positive quand x tend vers x_1).

Il ne reste plus qu'à étudier les variations de la fonction. Elle est dérivable sur chacun de ses intervalles de définition, de dérivée $f'(x) = \frac{x^2 - x - 3 - (2x - 1)(x + 3)}{(x^2 - x - 3)^2} = \frac{-x^2 - 6x}{(x^2 - x - 3)^2} = \frac{-x(x + 6)}{(x^2 - x - 3)^2}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, qui s'annule en $x = 0$ et $x = -6$ et qui sera positif uniquement entre ces deux valeurs. Profitons-en pour calculer $f(0) = \frac{3}{-3} = -1$ et $f(-6) = \frac{-3}{39} = -\frac{1}{13}$ afin de compléter le tableau de variations de la fonction :

x	$-\infty$	-6	-3	x_1	0	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\emptyset	$+$	$+$	\emptyset	$-$	$-$
f	0	$-\frac{1}{13}$	0	$+\infty$	$-\infty$	-1	$+\infty$

On termine enfin notre étude en traçant une allure de la courbe représentative de f , en prenant bien soin d'indiquer les différentes asymptotes, ainsi que les tangentes horizontales aux points d'annulation de la dérivée :



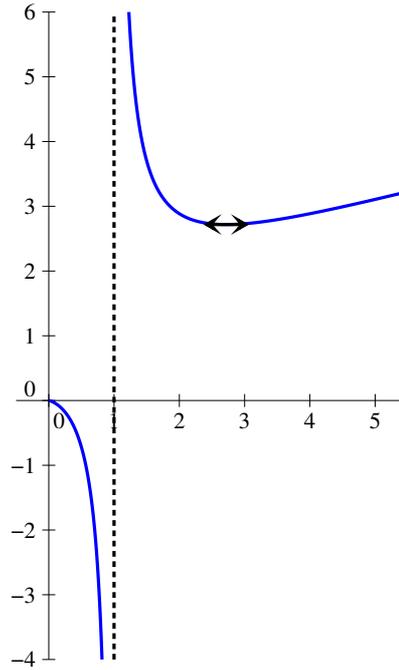
$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-3}$$

2. La fonction g est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Elle y est dérivable, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$, dont le signe est celui de $\ln(x) - 1$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, e[$, et strictement croissante sur $]e, +\infty[$.

On a besoin de connaître les résultats de croissance comparée pour affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Pas de forme indéterminée en 0, par contre, où on a directement $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$. Enfin, les dernières limites ne posent aucun problème : $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$ (le dénominateur est négatif à gauche de 1) et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$. En calculant $g(e) = e$, on complète le tableau de variations suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$	\emptyset	$+$
g	0	$-\infty$	$+\infty$	e

On conclut bien sûr avec une allure de courbe :

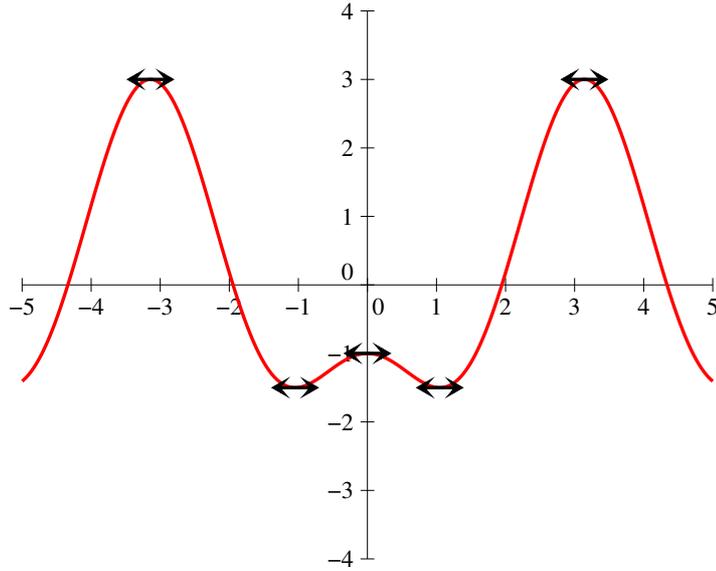


3. La fonction h est bien sûr définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} , elle est de plus paire (car la fonction \cos est paire) et 2π -périodique (là aussi car \cos l'est également). On peut donc restreindre l'étude de la fonction à l'intervalle $[0, \pi]$, et compléter la courbe ensuite par symétrie par rapport à (Oy) puis en exploitant la périodicité.

La dérivée de notre fonction est donnée par $h'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 2\sin(x)(1 - 2\cos(x))$ (en exploitant la formule de duplication $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$; si on ne connaît pas cette formule on peut quand même s'en sortir mais le calcul est plus long). Sur $[0, \pi]$, le sinus est toujours positif (mais s'annule en 0 et en π), reste à déterminer le signe de $1 - 2\cos(x)$. Cette expression est positive lorsque $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$, ce qui, sur l'intervalle $[0, \pi]$, se produit sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. La dérivée change donc de signe en $\frac{\pi}{3}$, qui est un minimum local de la fonction de valeur $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. On calcule également $h(0) = 0$ et $h(\pi) = 1 - (-2) = 3$ pour compléter le tableau de variations de h :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$h'(x)$	0	-	0
h	0	$-\frac{3}{2}$	3

En complétant par symétrie et par périodicité, on obtient une courbe ressemblant à ceci :



Exercice 2

1. Les fonctions f_n sont toutes définies et dérivables sur \mathbb{R} . Comme $f_0(x) = e^{-x^2}$, on calcule, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_0(x) = -2xe^{-x^2}$, qui est simplement du signe de $-x$. La fonction admet donc un maximum en 0 de valeur $f_0(0) = e^0 = 1$, et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = 0$ (aucune difficulté), ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f_0	0	1	0

On peut même remarquer que la fonction f_0 est paire, voire qu'il s'agit de la célèbre « courbe en cloche » de Gauss si utile dans le domaine des probabilités.

2. Comme $f_1(x) = xe^{-x^2}$, on calcule $f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, et s'annule en particulier lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$, soit $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On

calcule donc $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}e}$. Les limites données dans l'énoncé nous permettent par ailleurs d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$. On peut alors dresser le tableau suivant (en utilisant le fait que f_1 est impaire pour ne pas avoir à calculer les autres valeurs) :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f_1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}e}$	$\frac{1}{\sqrt{2}e}$	0

3. Ce n'est pas vraiment plus dur : $f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2} = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$. La dérivée s'annule toujours en 0 (sauf quand $n = 1$, comme on a vu plus haut) sans changer de signe quand n est impair (puisque dans ce cas x^{n-1} est une puissance paire de x qui est

toujours positive), et pour $x = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}$. On calcule $f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$ (la valeur de l'autre côté sera égale ou opposée selon la parité de n . Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont toujours nulles (c'est donné par l'énoncé pour $+\infty$, et on peut invoquer la parité des fonctions pour $-\infty$). On obtient alors le tableau suivant si n est impair :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{n}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
f_1	0	$-\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	0	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	0

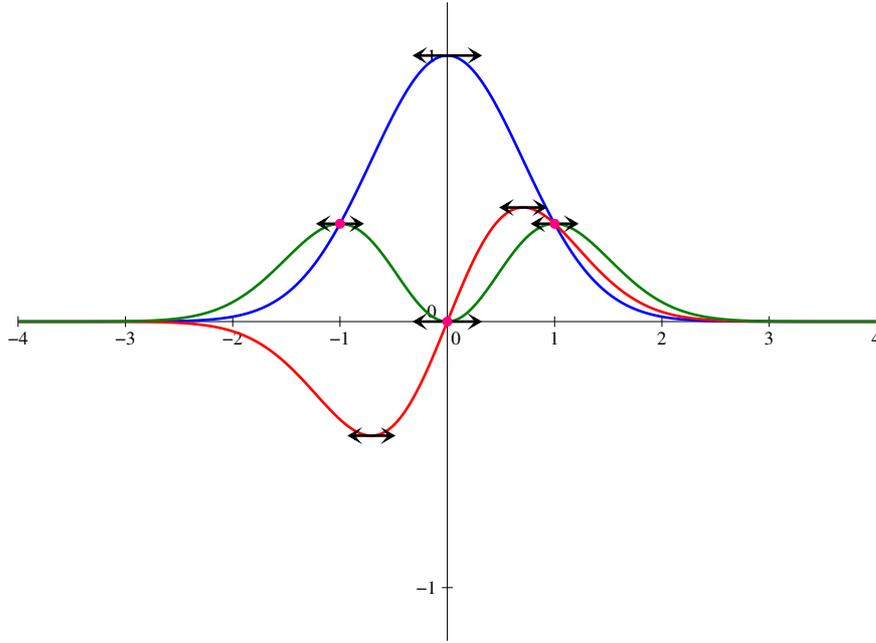
Et si n est pair :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{n}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
f_1	0	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	0	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	0

Dans le cas particulier de $f_2(x) = x^2 e^{-x^2}$, la dérivée s'annule en 0 et en ± 1 . On calcule $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, puis on dresse le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f_2	0	$\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	0

- Calculons $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n e^{-x^2} - x^{n+1} e^{-x^2} = x^n(1-x)e^{-x^2}$. La courbe \mathcal{C}_n est donc au-dessus de \mathcal{C}_{n+1} sur l'intervalle $[0, 1]$, et en-dessous sur $[1, +\infty[$. Toutes les courbes se coupent au point de coordonnées $\left(1, \frac{1}{e}\right)$, ainsi qu'à l'origine du repère, sauf pour le cas particulier de \mathcal{C}_0 . Sur \mathbb{R}^- , \mathcal{C}_n est toujours en-dessous si n est impair, et toujours au-dessus si n est pair, ce qui est évident vu le signe des deux fonctions correspondantes. Faisons de même pour $f_n(x) - f_{n+2}(x) = x^n(1-x^2)e^{-x^2}$. Si n est pair, \mathcal{C}_n est au-dessus de \mathcal{C}_{n+2} sur $[-1, 1]$, en-dessous le reste du temps. Si n est impair, elle est au-dessus sur $[0, 1]$ et sur $] -\infty, -1]$ et en-dessous le reste du temps. Les courbes « paires » se coupent donc au point de coordonnées $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ et les courbes « impaires » au point de coordonnées $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.
- Voici les allures, avec \mathcal{C}_0 en bleu, \mathcal{C}_1 en rouge, \mathcal{C}_2 en vert, et les points d'intersection en rose. Pour le placement des points importants, on doit être capable de calculer $\frac{1}{e} \simeq 0.4$ pour avoir l'ordonnée du point d'intersection des courbes, et celle des maxima de f_2 . Le maximum de f_1 est nettement plus pénible, il est atteint pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7$ et vaut $\frac{1}{\sqrt{2e}} \simeq \frac{1}{\sqrt{5.4}} \simeq \frac{1}{2.5} \simeq 0.4$. Il est en fait très légèrement au-dessus de l'ordonnée $\frac{1}{e}$ (l'étude des positions relatives assure qu'il est nécessairement au-dessus).



Exercice 3

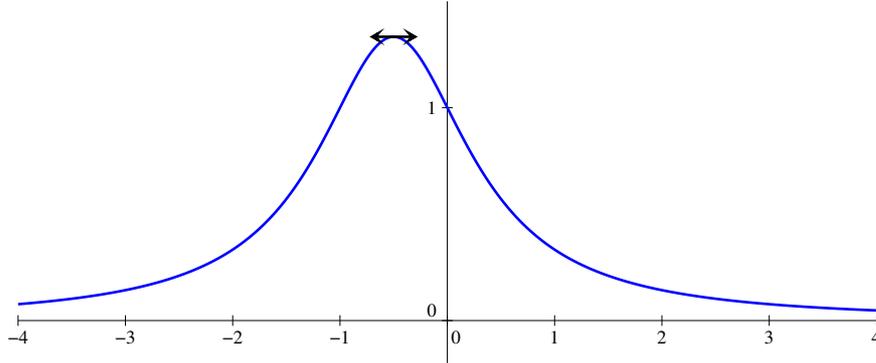
1. Le trinôme $1 + x + x^2$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, il est donc strictement positif sur \mathbb{R} et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Toutes les fonctions manipulées dans cet exercice sont des fonctions rationnelles dérivable sur tout leur ensemble de définition. On calcule d'abord, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, puis en dérivant f' comme un produit, $f''(x) = -\frac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}$.
3. La dérivée seconde f'' est du signe de $x(x+1)$ (le dénominateur est toujours du signe de x^2+x+1 , donc positif), donc négative uniquement entre -1 et 0 . Les seules limites à calculer sont celles en $-\infty$ et en $+\infty$ qui sont toutes les deux nulles, pour f' comme pour f , car on a un quotient de polynômes dont le dénominateur est de degré strictement plus grand que le numérateur. Reste à calculer $f'(0) = -1$ et $f'(-1) = 1$ pour compléter le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f'	0	1	0	0

La dérivée f' est du signe de $-(2x+1)$ et s'annule en particulier pour $x = -\frac{1}{2}$. On a déjà précisé les limites de f , il ne reste plus qu'à calculer l'ordonnée du maximum $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f		$\frac{4}{3}$	
	0		0

4. On se contentera d'indiquer la tangente horizontale au maximum sur la courbe, mais le calcul de f'' permet en fait d'être plus précis : la courbe représentative de f est convexe sur les intervalles $] -\infty, -1]$ et $[0, +\infty[$ et concave sur l'intervalle $[0, 1]$, ce qu'on peut bien sûr essayer de respecter lors du tracé de l'allure de courbe.



5. Par décroissance de la fonction f sur $[0, +\infty[$, si $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$, alors $f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1} = \frac{9}{13} < 1$, on obtient bien $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$, donc l'intervalle est stable.
6. La dérivée f' est strictement croissante et négative sur l'intervalle I , la valeur maximale atteinte par $|g'|$ sur cet intervalle est donc $\left|g'\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{\frac{2}{3} + 1}{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1\right)^2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \frac{135}{169}$. On peut en déduire que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq C$, avec $C = \frac{135}{169} \in]0, 1[$.
7. La fonction $z : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynômiale et, $\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Le discriminant de cette dérivée est $\Delta = 4 - 12 < 0$, donc z' est toujours positive et z strictement croissante sur \mathbb{R} . Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} z(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = +\infty$, la fonction z est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . En particulier, l'équation $z(x) = 0$ admet une unique solution. Or, $z(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + x + 1) = 1 \Leftrightarrow x = f(x)$, ce qui prouve que cette unique solution est également l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. En posant $g(x) = f(x) - x$, la fonction g est continue et vérifie $g\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \frac{9}{13} - \frac{1}{3} = \frac{14}{39} > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure donc que la fonction g s'annule (au moins) une fois dans l'intervalle I . Comme on sait déjà que g s'annule une seule fois sur \mathbb{R} tout entier, la valeur d'annulation l de la fonction g appartient nécessairement à l'intervalle I .
8. (a) C'est une récurrence très facile : $u_0 \in I$ par définition, et $u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \in I$ d'après la question 5. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, cela prouve l'hérédité, et la propriété « $u_n \in I$ » est donc vérifiée pour tout entier naturel n .
- (b) Puisqu'on sait que $l \in I$ et $u_n \in I$, il suffit d'appliquer l'inégalité donnée dans la question 6 à $x = l$ (qui vérifie bien $f(x) = f(l) = l$) et à $y = u_n$, pour lequel $f(y) = f(u_n) = u_{n+1}$. On trouve immédiatement l'inégalité souhaitée.

- (c) C'est une récurrence tout à fait classique exploitant les questions précédentes : puisque $l \in I$, $|u_0 - l| = |1 - l| \leq \frac{2}{3}$, ce qui prouve largement l'initialisation au rang 0 (on doit prouver que $|u_0 - l| \leq C^0 = 1$). Ensuite, si on suppose $|u_n - l| \leq C^n$, on en déduira $|u_{n+1} - l| \leq C|u_n - l| \leq C \times C^n = C^{n+1}$ en appliquant successivement le résultat de la question précédent et l'hypothèse de récurrence. Ceci achève de prouver l'hérédité.
- (d) On sait que $0 \leq |u_n - l| \leq C^n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} C^n = 0$ (suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1). D'après le théorème des gendarmes, on aura donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
- (e) Pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de l , il faut trouver un réel x tel que $|x - u_n| \leq 10^{-3}$. Les questions précédentes prouvent que ce sera le cas du réel u_n si $C^n \leq 10^{-3}$ (et même probablement avant car on a une simple majoration et non une égalité). Cette dernière condition est vérifiée si $n \ln(C) \leq -3 \ln(10)$, soit $n \geq \frac{-3 \ln(10)}{\ln(C)}$ (attention au changement de sens des inégalités, comme $C \in]0, 1[$, $\ln(C) < 0$). Si on avait une calculatrice sous la main, on pourrait calculer la valeur de $n_0 = \text{Ent} \left(\frac{-3 \ln(10)}{\ln(C)} \right) + 1$ (l'ajout d'une unité assure que le nombre entier obtenu est supérieur à la borne souhaitée), puis la valeur de u_{n_0} qui fournira la valeur approchée demandée.