

TD n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

2 septembre 2025

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible les fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-3}$
2. $g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$
3. $h(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$

Exercice 2

On considère dans cet exercice la famille de fonctions f_n définies par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On pourra utiliser dans cet exercice le résultat classique de croissance comparée suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{x^2}} = 0$.

1. Étudier complètement la fonction f_0 (variations, limites, pas de courbe pour l'instant).
2. Étudier complètement la fonction f_1 (variations, limites, pas de courbe pour l'instant).
3. Calculer la dérivée f'_n de la fonction f_n (le paramètre n étant un entier naturel), et étudier son signe (on pourra distinguer des cas selon les valeurs prises par n). On dressera en particulier le tableau de variations de la fonction f_2 .
4. En notant $\mathcal{C}_n$ les courbes représentatives des fonctions f_n , étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+1}$, puis celles de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+2}$. On précisera en particulier les points communs à ces courbes.
5. Tracer dans un **même** repère une allure cohérente des courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Exercice 3

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f , puis sa dérivée seconde f'' . On donnera l'expression la plus factorisée possible de $f''(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f' sur son ensemble de définition, puis celui de f (on précisera les limites utiles).
4. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f .

5. Montrer que l'intervalle $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ est stable par la fonction f , c'est-à-dire que $f(I) \subset I$.
6. Montrer qu'il existe une constante $C \in]0, 1[$ telle que, $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq C$. On **admet** que cette inégalité implique la suivante : $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$.
7. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une seule solution réelle (sans chercher à la résoudre), et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet également une seule solution qu'on notera l . Vérifier enfin que $l \in I$.
8. On définit désormais une suite (u_n) de la façon suivante : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ (réutiliser les questions précédentes est vivement conseillé).
 - (b) Montrer que l'inégalité $|u_{n+1} - l| \leq C \times |u_n - l|$ est vérifiée pour tout entier naturel n .
 - (c) En déduire que $|u_n - l| \leq C^n$.
 - (d) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .
 - (e) Donner une méthode précise permettant de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près du réel l (aucune application numérique n'est demandée).