Interrogation Écrite n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

22 janvier 2026

1. Il faut de toute façon créer une matrice $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Par exemple, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.
2. Le plus naturel est d'utiliser le binôme de Newton, en posant $A = B + 2I_3$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule aisément $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $B^3 = 0$ et donc, $\forall k \geq 3$, $B^k = 0$. Les matrices B et $2I_3$ commutant de façon évidente, on peut calculer $A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = 2^n I_3 + n2^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} B^2 = 2^n I_3 + n2^{n-1}B + n(n-1)2^{n-3}B^2 = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
3. On commence un pivot de Gauss en effectuant les deux opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$. Les deux dernières lignes étant proportionnelles, la matrice ne peut plus être inversible (si on effectue désormais l'opération $L_3 - 2L_2$, on aura une ligne entièrement nulle).
4. (a) Je vais bien évidemment résoudre le système $\begin{cases} x - y - z = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases}$. Mieux, je vais même le résoudre par substitution (horreur !) : $y = b - x$, $z = c - x$ donc $x - b + x - x + x = a$, soit $x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$, puis $y = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c$ et $z = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c$. Autrement dit, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) On calcule donc $AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   (c) Récurrence classique : au rang 0, $A^0 = I_3 = PP^{-1}$ est vraie. De plus, $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$. Si on suppose la propriété vérifiée au rang n, alors $A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve l'hérédité.

   (d) On a bien sûr $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$, puis $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -(-\frac{1}{2})^n & -(-\frac{1}{2})^n \\ 1 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 1 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$, et enfin $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$. On notera en passant que les puissances de A conservent toujours la même structure (trois coefficients identiques sur la diagonale, six coefficients identiques en-dehors), ce qui aurait permis de calculer A^n par d'autres méthodes sans avoir besoin de connaître la matrice P.

(e) En notant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, il s'agit donc de montrer que $X_n = A^n X_0$, ce qui se fait par une récurrence pratiquement triviale. C'est clairement vrai au rang 0, et le système de relations de récurrences donné pour les trois suites est équivalent à l'égalité matricielle $X_{n+1} = AX_n$, qui permet de démontrer l'hérédité : en supposant $X_n = A^n X_0$, on multiplie simplement à gauche par la matrice A pour obtenir $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_n = A^{n+1} X_0$.

(f) Il suffit d'effectuer le produit de la matrice A^n obtenue plus haut par la matrice-colonne X_0 pour trouver $u_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, puis $v_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1$ (oui, la suite (v_n) est bêtement constante, ce dont on peut se convaincre assez facilement en calculant les quatre ou cinq premiers termes de chaque suite), et enfin $w_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Comme la suite géométrique $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ a une limite nulle, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.