# Interrogation Écrite n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

22 janvier 2026

**Énoncé :**

1. En notant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donner une matrice $B$ telle que $BA = I_2$ (aucune justification demandée).

2. Calculer les puissances (positives) de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ n'est **pas** inversible.

4. On note dans cet exercice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $P$ est inversible et calculer son inverse.
   (b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) En déduire la valeur de $A^n$ (on écrira explicitement tous les coefficients de la matrice).
   (e) Trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ vérifient $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 0$, ainsi que les relations de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{v_n + w_n}{2}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + w_n}{2}$ et $w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (f) En déduire la valeur de $u_n$, $v_n$ et $w_n$, ainsi que les limites des trois suites.