

Interrogation Écrite n° 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

16 octobre 2025

1. On commence par écrire le $\ln(t^2)$ sous la forme $2\ln(t)$, puis on effectue une IPP en posant $u'(t) = 4t$, donc $u(t) = 2t^2$, et $v(t) = \ln(t)$ donc $v'(t) = \frac{1}{t}$. On obtient $I_1 = [2t^2 \ln(t)]_1^e - \int_1^e 2t \, dt = 2e^2 - [t^2]_1^e = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$.
2. Je sais bien qu'aucun d'entre vous n'aura eu l'outrecuidance de ne pas savoir faire ces magnifiques courbes qui sont de toute façon dans le cours, pas la peine de les inclure dans ce corrigé.
3. Puisqu'on nous le demande, posons $t = \sqrt{x}$, donc $x = t^2$. Les bornes de l'intégrale vont devenir 1 et 3, et l'élément différentiel vérifie $dx = 2t \, dt$, donc $I_2 = \int_1^3 \frac{1}{1+t} \times 2t \, dt = \int_1^3 \frac{2t+2-2}{1+t} \, dt = \int_1^3 2 - \frac{2}{1+t} \, dt = [2t - \ln(1+t)]_1^3 = 6 - \ln(4) - 2 + \ln(2) = 4 - \ln(2)$.
4. Posons donc bêtement $f(x) = \arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (la dérivée ne s'annule qu'en 0). Comme $f(0) = 0$, elle est bien strictement positive sur $]0, +\infty[$, exactement ce qu'on nous demandait.
5. On effectue une IPP en posant $v(t) = t$, donc $v'(t) = 1$, et $u'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$ qu'on primitive évidemment en $u(t) = \tan(t)$. On en déduit $I_3 = [t \tan(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) \, dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \, dt = \frac{\pi}{4} + [\ln(\cos(t))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$.
6. On pose tout bêtement $X = \cos(2x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $2X^2 - 3X + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et pour racines $X_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{3+1}{4} = 1$. Le cas $X = 1$ se traduit par $2x \equiv 0[2\pi]$, donc $x \equiv 0[\pi]$, et le cas $X = \frac{1}{2}$ se traduit par $2x \equiv \pm \frac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $x \equiv \pm \frac{\pi}{6}[\pi]$.
7. On effectue bien sûr une décomposition en éléments simples. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$ et admet pour racines $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$, donc on peut décomposer la fraction sous la forme $\frac{x}{x^2-2x-3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$. Un produit par $x+1$ suivi du choix de $x = -1$ donne $a = \frac{1}{4}$. De même, multiplier par $x-3$ puis poser $x = 3$ donne $b = \frac{3}{4}$. Finalement, $I_3 = \int_1^2 \frac{3}{4(x-3)} + \frac{1}{4(x+1)} \, dx = \left[\frac{3}{4} \ln(3-x) + \frac{1}{4} \ln(x+1) \right]_1^2 = -\frac{3}{4} \ln(2) + \frac{1}{4} \ln(3) - \frac{1}{4} \ln(2) = \frac{1}{4} \ln(3) - \ln(2)$.