Interrogation Écrite n^o 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

24 septembre 2025

Énoncé :

1. Je vous laisse relire le cours si besoin.
2. On va devoir faire un « tableau de signes ». Commençons par trouver les valeurs d'annulation du trinôme $x^2 - 2x - 3$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$ et pour racines $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$. Il sera bien sûr positif à l'extérieur de ces racines. L'expression $2x + 1$ s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$, ce qui permet de dresser le tableau suivant, en notant $A = |x^2 - 2x - 3| + |2x + 1|$:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$\lvert x^2 - 2x - 3\rvert$		$x^2 - 2x - 3$	0	$-x^2 + 2x + 3$		$-x^2 + 2x + 3$	0	$x^2 - 2x - 3$	
$\lvert 2x + 1\rvert$		$-2x - 1$		$-2x - 1$	0	$2x + 1$		$2x + 1$	
A		$x^2 - 4x - 4$		$-x^2 + 2$		$-x^2 + 4x + 4$		$x^2 - 2$	

On résout ensuite sur chacun des intervalles :

- sur $]-\infty, -1]$, $A < 4$ si $x^2 - 4x - 8 < 0$. Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 + 32 = 48$ et pour racines $x_3 = \dfrac{4 - \sqrt{48}}{2} = 2 - 2\sqrt{3} < -1$ et $x_4 = \dfrac{4 + \sqrt{48}}{2} = 2 + 2\sqrt{3}$. Il est négatif entre les racines, donc $\mathcal{S}_1 =]2 - 2\sqrt{3} - 1]$.
- sur $\left[-1, \dfrac{-}{1}2\right]$, on se ramène à l'inéquation $-x^2 < 2$, qui est manifestement toujours vraie, donc $\mathcal{S}_2 = \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$.
- sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 3\right]$, l'inéquation équivalente est $-x^2 + 4x < 0$, soit $x(4 - x) < 0$, ce qui est vrai à l'extérieur des racines évidentes 0 et 4. Autrement dit, $\mathcal{S}_3 = \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$.
- enfin, sur $[3, +\infty[$, l'inéquation $x^2 < 6$ n'est jamais vérifiée (puisque $\sqrt{6} < 3$), donc il n'y a aucune solution sur cet intervalle.
  Il ne reste plus qu'à conclure : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3 =]2 - 2\sqrt{3}, 0[$.

3. On passe tout du même côté pour obtenir $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 3} < 0$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$ et pour racines $x_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$. On peut ensuite faire un tableau de signes :

x		-3		1		3	
$x^2 + 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$x - 3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x^2+2x-3}{x-3}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, -3[\cup]1, 3[$.

4. Égalité de valeurs absolues : les deux expressions sont égales ou opposées. Si elles sont égales, $x^3 - 4x^2 + x + 2 = x^3 + x - 2$, donc $-4x^2 + 4 = 0$, soit $x^2 = 1$, ce qui donne comme premières solutions $x = -1$ et $x = 1$. Si elles sont opposées, $x^3 - 4x^2 + x + 2 = -x^3 - x + 2$, donc $2x^3 - 4x^2 + 2x = 0$, soit $2x(x^2 - 2x + 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$.
5. On commence par tout multiplier par e^x (qui n'est jamais nul) et par poser $X = e^x$ pour obtenir l'équation du troisième degré $2X^3 + 3X^2 - 11X - 6 = 0$. Avec un petit effort, on constate que 2 en est une racine évidente : $2 \times 8 + 3 \times 4 - 11 \times 2 - 6 = 16 + 12 - 22 - 6 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche de l'équation sous la forme $2X^3 + 3X^2 - 11X - 6 = (X - 2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - 2a)X^2 + (c - 2b)X - 2c$. Une petite identification des coefficients donne $a = 2$, puis $b - 2a = 3$ donc $b = 7$, et $c - 2b = -11$ donc $c = 3$, valeur confirmée par la dernière équation. Le trinôme $2X^2 + 7X + 3$ a pour discriminant $\Delta = 49 - 24 = 25$ et admet pour racines réelles $X_1 = \dfrac{-7-5}{4} = -3$ et $X_2 = \dfrac{-7+5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Les valeurs que peut prendre e^x sont donc $-\dfrac{1}{2}$, -3 et 2. Il faut bien entendu oublier les valeurs négatives qui sont impossibles, ce qui nous laisse $\mathcal{S} = \{\ln(2)\}$.
6. Posons donc $x = X - 2$ et développons $(X-2)^3 + 4(X-2)^2 - 17(X-2) - 60 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 + 4X^2 - 16X + 16 - 17X + 34 - 60 = X^3 - 2X^2 - 21X - 18$. C'est déjà nettement plus sympathique puisque $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 21(-1) - 18 = 0$. On peut donc factoriser sous la forme $X^3 - 2X^2 - 21X - 18 = (X+1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b+a)X^2 + (c+b)X + c$. Une identification des coefficients donne alors $a = 1$, $b = -2 - a = -3$ et $c = -21 - b = -18$. Reste à trouver les racines du trinôme $X^2 - 3X - 18$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 + 72 = 81$, donc pour racines $X_1 = \dfrac{3-9}{2} = -3$ et $X_2 = \dfrac{3+9}{2} = 6$. Il ne faut pas oublier de remontrer le changement de variable $x = X - 2$ pour conclure : $\mathcal{S} = \{-5, -3, 4\}$.