

Devoir Surveillé n° 8 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 mars 2026

Exercice 1

- F_1 n'est sûrement pas un sous-espace vectoriel car il n'est pas stable par somme : par exemple $I_3 \in F_1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in F_1$, mais $I_3 + A \notin F_1$.
- F_2 est clairement un sous-espace vectoriel puisque $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille génératrice donnée étant clairement libre (les coefficients non nuls ne sont pas situés au même endroit), c'est une base, et $\dim(F_2) = 4$.
- Là encore, F_3 est clairement un sous-espace vectoriel, et $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Là encore, la famille génératrice fournie est trivialement libre, et $\dim(F_3) = 3$.
- F_4 ne peut pas être un sous-espace vectoriel puisqu'il ne contient pas la matrice nulle (dont la transposée est également nulle).
- Il est assez facile de prouver que F_5 est un sous-espace vectoriel en montrant la stabilité par somme et par produit extérieur, mais comme on nous demande de toute façon une base, autant écrire complètement le système qu'il va falloir résoudre. Si on note $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on obtient pour les trois coefficients diagonaux les conditions $a = 2a$, $e = 2e$ et $i = 2i$ qui imposent la nullité de ces coefficients. Mais par ailleurs, en regroupant les équations correspondant aux autres coefficients deux par deux, on a par exemple $b = 2d$ et $d = 2b$, ce qui n'est possible que si $b = d = 0$. De même, on trouve $c = g = 0$ et $f = h = 0$. Finalement, seule la matrice nulle est solution de l'équation, donc $F_5 = \{0\} = \text{Vect}(\emptyset)$. Le sous-espace F_5 est de dimension 0.
- F_6 n'est pas du tout un sous-espace vectoriel puisqu'il n'est pas stable par somme. Par exemple $I_3 \in F_6$ et $-I_3 \in F_6$ mais leur somme, la matrice nulle, n'est pas vraiment inversible.
- Si on se restreint à des matrices nilpotentes très particulières (par exemple des matrices triangulaires supérieures strictes), on peut avoir l'impression que l'ensemble est stable par somme. En fait, ce n'est pas le cas. Par exemple, si on pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, les matrices B et C sont nilpotentes (on a facilement $B^2 = C^2 = 0$), mais $B+C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente : $(B+C)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $(B+C)^3 = B+C$

etc (la suite des puissances de la matrice $B+C$ est périodique de période 2, et aucune de ces puissances n'est nulle ; de toute façon on sait que, si la matrice était nilpotente, son cube serait déjà nul, ce qui n'est pas le cas). L'ensemble F_7 n'est donc pas stable par somme, et n'est pas un sous-espace vectoriel.

- On peut facilement prouver que F_8 est un sous-espace vectoriel en démontrant la stabilité par somme et produit par un réel. Si on veut la dimension et une base, par contre, pas d'autre choix qu'un calcul assez bourrin. Posons donc $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, et cal-

culons $AM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a-d+2g & b-e+2h & c-f+2i \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a+c & b-c & 2c \\ d+f & e-f & 2f \\ g+i & h-i & 2i \end{pmatrix}$.

On va éviter d'écrire tout le système résultant de l'égalité des deux matrices : les coefficients de la dernière colonne sont égaux si et seulement si $c = f = 0$ (la dernière condition devient alors $2i = 2i$, qui est évidemment toujours vérifiée). Les quatre équations sur les deux lignes du haut des deux premières colonnes imposent à nouveau $c = f = 0$ et peuvent donc être oubliées. Il reste alors deux équations : $a - d + 2g = g + i$ qui impose $g = i + d - a$, et $b - e + 2h = h - i$ qui impose $h = e - i - b$. Finalement, on

obtient $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ i+d-a & i+e-b & i \end{pmatrix}$, avec $(a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}^5$. Autrement dit, $F_8 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Les

cinq matrices obtenues formant très clairement une famille libre (comme d'habitude, chaque matrice a un coefficient non nul à au moins un endroit où les quatre autres s'annulent), donc une base de F_8 , on a donc $\dim(F_8) = 5$. Pour les plus curieux, c'est du au fait que la matrice A a une valeur propre double et une autre simple.

- Encore un ensemble qui est un sous-espace vectoriel, car stable par somme et par produit par une constante (puisque $P^{-1}(\lambda M)P = \lambda P^{-1}MP$ et $P^{-1}(M+N)P = P^{-1}MP + P^{-1}NP$, cela découle en fait simplement de la constatation que l'ensemble des matrices diagonales est lui-même stable par produit par une constante et par somme). Si on veut en obtenir une base, on constate simplement que, si $P^{-1}MP = D$, avec D diagonale, alors $M = PDP^{-1}$. Or, en notant $E_{i,i}$ les matrices élémentaires ayant leur coefficient non nul sur la diagonale, toute matrice diagonale s'écrit sous la forme $aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3}$, et on en déduit que $M = aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} + cPE_{3,3}P^{-1}$, donc $F_9 = \text{Vect}(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})$. Si on veut aller au terme du raisonnement et notamment prouver que la famille de trois matrices obtenue est bien libre, il faut les calculer explicitement. On peut inverser P en deux temps

trois mouvements en résolvant le difficile système constitué des trois équations $x = a$, $y = b$ et $-x + y + z = c$, qui donne $z = c - a - b$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul absolument

ébouffant permet alors d'obtenir $PE_{1,1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $PE_{2,2}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

et $PE_{3,3}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Les trois matrices forment bien une famille libre, donc une base de F_9 , qui est donc de dimension 3.

Exercice 2

- Supposons qu'une combinaison linéaire des trois vecteurs de la famille s'annule : $a(1, 2, 0, 1) + b(1, -1, 1, 1) + c(0, 2, -1, -2) = 0$, cela se traduit par le système suivant :
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - b + 2c = 0 \\ b - c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}.$$

La première et la troisième ligne imposent alors $a = -b$ et $c = b$, et si on reporte dans la deuxième ou la quatrième équation (on a le choix!), on obtient directement $b = 0$, donc $a = c = 0$ également. La famille est bien libre, et comme elle est évidemment génératrice de F , $\dim(F) = 3$.

- Puisqu'on a trois vecteurs dans notre famille, il suffit d'en ajouter un quatrième qui soit linéairement indépendant des trois autres pour obtenir une famille libre de quatre vecteurs, donc une base de $\mathbb{R}^4$. Le théorème de la base incomplète assure qu'on peut choisir ce vecteur supplémentaire parmi les vecteurs de la base canonique. Essayons avec $u = (0, 1, 0, 0)$ (je prends volontairement celui-ci plutôt que le premier vecteur de la base canonique pour garder intactes les première et troisième ligne du système précédent), et vérifions si la famille (u_1, u_2, u_3, u) est libre. En écrivant le système correspondant à une annulation de la combinaison linéaire $au_1 + bu_2 + cu_3 + du$, on conserve les deux conditions $a = -b$ et $c = b$, et la quatrième équation, qui reste également identique, impose comme tout à l'heure $b = a = c = 0$. Il ne reste alors plus qu'à constater que la deuxième équation $2a - b + 2c + d = 0$ impose $d = 0$ pour conclure que la famille (u_1, u_2, u_3, u) est une base de E .
- On résout le système définissant G pour l'écrire « sous forme de Vect ». Comme on n'a que deux équations pour quatre inconnues, tout ce qu'on peut faire est exprimer deux d'entre elles en fonction des deux autres, par exemple $y = 2z - t$ (avec la deuxième équation) puis $x = t - y - z = 2t - 3z$. Autrement dit, $G = \{(2t - 3z, 2z - t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((2, -1, 0, 1), (-3, 2, 1, 0))$. La famille obtenue étant évidemment libre (les deux vecteurs ne sont pas proportionnels), c'est une base de G , qui est donc de dimension 2.
- La formule de Grassmann assure que $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 3 + 2 - \dim(F + G)$. Or, $F + G$ ne peut pas être de dimension plus grande que 4 puisque c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, ce qui implique que $\dim(F \cap G) \geq 1$.
- Soit $u(x, y, z, t) \in F \cap G$. Puisque $u \in F$, il peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3 qui en forment une base, donc $u = (a + b, 2a - b + 2c, b - c, a + b - 2c)$. Par ailleurs, il doit également vérifier les deux équations définissant G , ce qui impose que $a + b + 2a - b + 2c + b - c - a - b + 2c = 2a - b + 2c - 2b + 2c + a + b - 2c = 0$, soit $2a + 3c = 3a - 2b + 2c = 0$. On doit donc avoir $c = -\frac{2}{3}a$ et $b = \frac{5}{6}a$, ce qui implique que $u = \left(\frac{11}{6}a, -\frac{1}{6}a, \frac{3}{2}a, \frac{19}{6}a\right)$, et donc que $F \cap G = \text{Vect}\left(\left(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{2}, \frac{19}{6}\right)\right)$.
- Ah, ça c'est gentil, une question qu'on a déjà traitée plus haut, il n'y a donc rien à faire.
- Il suffit de prouver que la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de E , donc qu'elle est libre ou génératrice (puisque'elle est constituée de quatre vecteurs). On va pour une fois démontrer le caractère générateur, ça nous permettra de traiter facilement la dernière question ensuite. On cherche donc à écrire un vecteur $u(x, y, z, t)$ comme combinaison linéaire $au_1 +$

$bu_2 + cv_1 + dv_2$, ce qui donne le système suivant :
$$\begin{cases} a + b - 3c + 2d = x \\ 2a - b + 2c - d = y \\ + c = z \\ a + b + d = t \end{cases}.$$
 Les

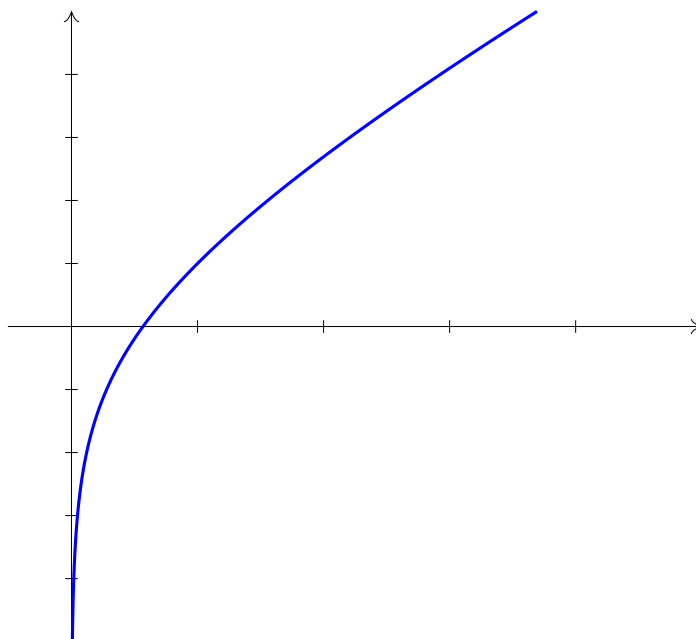
opérations $L_2 \rightarrow 2L_1 - L_2$ et $L_4 \rightarrow L_4 - L_1$ permettent d'obtenir le système équivalent
$$\begin{cases} a + b - 3c + 2d = x \\ 3b - 8c + 5d = 2x - y \\ + c = z \\ - d = t - x \end{cases}.$$
 On va exceptionnellement terminer la résolution

par substitution : les deux dernières équations donnent $b = z - c$ et $d = 3c + x - t$, ce qui permet de remplacer dans la deuxième équation : $3z - 3c - 8c + 15c + 5x - 5t = 2x - y$, soit $4c = -3x - y - 3z + 5t$, et donc $c = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z + \frac{5}{4}t$. On en déduit que $b = z - c = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{7}{4}z - \frac{5}{4}t$, $d = 3c + x - t = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}y - \frac{9}{4}z + \frac{11}{4}t$. Enfin, on calcule $a = x - b + 3c - 2d = x - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{7}{4}z + \frac{5}{4}t - \frac{9}{4}x - \frac{3}{4}y - \frac{9}{4}z + \frac{15}{4}t + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{9}{2}z - \frac{11}{2}t = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t$. Le système a toujours une solution (unique de surcroît), donc la famille est bien une base de E , ce qui prouve que $\text{Vect}(u_1, u_2) \oplus \text{Vect}(v_1, v_2) = E$.

8. Il n'y a qu'à appliquer les formules obtenues à la question précédente pour $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ et $t = 4$, ce qui donne des valeurs étrangement sympathiques : $a = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} - 2 = 1$, $b = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{21}{4} - 5 = \frac{3}{2}$, $c = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{9}{4} + 5 = \frac{3}{2}$ et $d = -\frac{5}{4} - \frac{3}{2} - \frac{27}{4} + 11 = \frac{3}{2}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $(1, 2, 3, 4) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)_{(u_1, u_2, v_1, v_2)}.$

Exercice 3

- La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur cet intervalle comme somme de fonctions croissantes. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Si on veut vraiment ajouter un ou deux éléments pour aider au tracé de courbe, f est concave (sa dérivée seconde est la même que celle de la fonction $\ln$) et $f(1) = 1$ (seule valeur facile à calculer). Une allure de courbe sans intérêt (on pourrait avoir l'impression qu'il y a une asymptote oblique en $+\infty$, mais en fait non, l'écart entre $f(x)$ et x tend vers $+\infty$ même si les directions de la courbe et de la droite se rapprochent l'une de l'autre) :



2. L'étude précédente prouve que f est bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, l'existence et l'unicité de u_n en découlent.
3. Là encore c'est trivial : la fonction f est croissante, donc sa réciproque aussi. Or, par définition, $f(u_n) = n < n + 1 = f(u_{n+1})$, donc $u_n < u_{n+1}$. La suite est strictement croissante.
4. On va encore exploiter la monotonie de f (ou plutôt de f^{-1} pour être rigoureux). On calcule donc $f(n) = n + \ln(n) \geq n = f(u_n)$, donc $u_n \leq n$ (l'inégalité stricte n'est techniquement pas vraie pour $n = 1$, l'énoncé était imprécis). Par ailleurs, $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} + \ln\left(\frac{n}{2}\right)$. Il faudrait donc prouver que $\ln\left(\frac{n}{2}\right) < \frac{n}{2}$ pour en déduire que $f\left(\frac{n}{2}\right) < f(u_n)$ et donc que $\frac{n}{2} < u_n$. Or, on sait que, $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1 < x$ (inégalité de convexité classique), donc on a bien $\frac{n}{2} < u_n \leq n$. La minoration de gauche suffit évidemment à conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
5. Par définition, on a $u_n + \ln(u_n) = n$. Or, maintenant qu'on sait que $\lim u_n = +\infty$, on peut affirmer que $\ln(u_n) = o(u_n)$, et donc que $n = u_n + o(u_n)$. Cette égalité est équivalente à $u_n \sim n$.
6. Puisqu'il n'y a pas de question 6 dans l'énoncé, pas besoin de réponse 6 dans le corrigé.
7. Puisque $u_n + \ln(u_n) = n$, on a $n - u_n = \ln(u_n)$, donc $v_n = \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(u_n) - \ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln(n)}$. Bien sûr, puisque $u_n \sim n$, $\lim \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = \ln(1) = 0$, et la division par $\ln(n)$ ne va pas changer la valeur de la limite. On en déduit immédiatement que $\lim v_n = 1$. On cherche donc à calculer un équivalent de $\frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{u_n}{n} - 1\right)\right)}{\ln(n)}$. On sait que $\lim \frac{u_n}{n} - 1 = 0$ (toujours d'après l'équivalent de u_n), donc notre numérateur est équivalent à $\frac{u_n}{n} - 1$. Mais par ailleurs, comme $u_n + \ln(n) = n$, on a $u_n - n = -\ln(n)$, donc $\frac{u_n}{n} - 1 \sim -\frac{\ln(n)}{n}$. Finalement, $v_n - 1 \sim \frac{-\frac{\ln(n)}{n}}{\ln(n)} \sim -\frac{1}{n}$.
8. On vient de démontrer que $v_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{n - u_n}{\ln(n)} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, soit

$n - u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, et enfin $u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$. Les trois termes obtenus sont bien classés par ordre de grandeur décroissant.

9. On reprendre le calcul de $v_n - 1 = \frac{1}{\ln(n)} \left(\ln\left(1 + \frac{u_n}{n} - 1\right) \right)$, avec $\frac{u_n}{n} - 1 = -\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. Cette quantité a une limite nulle, on peut effectuer un DL de notre $\ln$ à l'ordre 2 pour obtenir $v_n - 1 = \frac{1}{\ln(n)} \left(-\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) \right) = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{\ln(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. Il se produit alors quelque chose de très surprenant puisqu'on a obtenu un terme « de trop » par rapport à ce qu'on veut obtenir (un seul terme supplémentaire nous suffit), mais surtout car le terme « du milieu » est négligeable par rapport à celui de droite et peut donc être intégré dans le o (on se serait plutôt attendu à avoir les termes « dans l'ordre »). Autrement dit, on a en fait plus simplement $v_n - 1 = -\frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$, donc $\frac{n - u_n}{\ln(n)} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. On termine le calcul comme tout à l'heure pour obtenir finalement $u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$. Si on souhaite continuer les calculs, il faudrait faire particulièrement attention à chaque étape à conserver les « bons » termes pour obtenir des ordres de grandeur décroissants. Heureusement, l'énoncé ne nous demande pas d'en faire plus...

Exercice 4

- La seule façon raisonnable d'espérer étudier f est d'écrire son expression sous forme exponentielle : $f(x) = e^{\frac{\sqrt{x+1}}{x} \ln(x+1)}$. Pour que f soit définie, il faut donc que $x + 1$ soit strictement positif (à cause du $\ln$, mais ça règlera aussi le problème de la racine carrée), et bien sûr que soit non nul. On a donc $\mathcal{D}_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
- Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} \ln(x+1) = 0$ (si on n'est pas convaincu on effectue le changement de variable $X = x + 1$ pour se ramener en 0). On en déduit immédiatement que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = e^0 = 1$, donc f est bien prolongeable par continuité. Si on pose $f(-1) = 1$, le taux d'accroissement de notre fonction en -1 est égal à $\tau_{-1}(h) = \frac{f(h-1) - 1}{h} = \frac{e^{\sqrt{h} \frac{\ln(h)}{h+1}} - 1}{h} \sim \frac{\sqrt{h} \ln(h)}{h(h+1)}$ en exploitant l'équivalent classique issu du taux d'accroissement de l'exponentielle en 0. On en déduit que $\tau_{-1}(h) \sim \frac{\ln(h)}{\sqrt{h}}$ (le terme $h + 1$ étant simplement équivalent à 1), ce qui prouve que $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{-1}(h) = -\infty$. La fonction prolongée n'est donc pas dérivable en -1 , mais on aura bien une tangente à la courbe à cet endroit, qui sera verticale.
- On commence par calculer un DL de ce qui se trouve dans l'exponentielle, en effectuant le calcul à l'ordre 3 du côté du $\ln(1+x)$ pour anticiper la division par x (inutile d'aller jusqu'à l'ordre 3 pour les **deux** facteurs, autant donc prendre le plus simple des deux!) : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, et $\frac{1}{x} \ln(1+x) = \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$, donc $\frac{\sqrt{x+1} \ln(x+1)}{x} = \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \right) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 \right) + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)$. On en déduit que $f(x) = e^{1 - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)} = e \times e^{-\frac{1}{24}x^2 + o(x^2)}$.

En posant $u = -\frac{1}{24}x^2 + o(x^2)$, qui a bien une limite nulle quand x tend vers 0, on peut effectuer un DL à l'ordre 1 de l'exponentielle (ça suffira largement puisque u^2 est négligeable par rapport à x^2) pour conclure : $f(x) = e \left(1 - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2) \right) = e - \frac{e}{24}x^2 + o(x^2)$.

Il est temps d'interpréter les résultats obtenus, en trois temps comme d'habitude :

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e$, ce qui prouve la possibilité d'un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = e$.
- f admet un DL1 en 0 qui est simplement $f(x) = e + o(x)$, ce qui prouve que ce prolongement est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$ (ce qui sera confirmé par l'étude de variations plus loin). La tangente est donc simplement horizontale, d'équation $y = e$.
- puisque $f(x) - e \sim -\frac{e}{24}x^2 < 0$, la courbe sera située en-dessous de cette tangente au voisinage de 0. Ici, cela revient exactement à dire que la fonction admet un maximum local en 0.

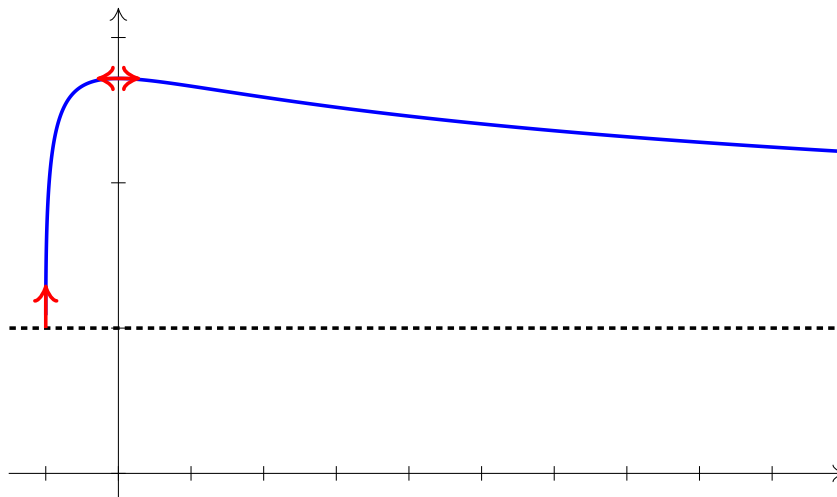
4. On a déjà $\ln(f(x)) = \frac{\sqrt{x+1} \ln(x+1)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x} \ln(x+1)}{x} \sim \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$. De plus, $\ln(x+1) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + o(1) \sim \ln(x)$, ce qui donne l'équivalent souhaité pour $f(x)$. Par croissance comparée, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$. Il y a bien une asymptote en $+\infty$, mais celle-ci est bêtement horizontale, pas besoin de calcul de développement asymptotique pour une fois. Mais comment va-t-on obtenir la position relative dans ces conditions ? Eh bien, simplement en constatant que $\ln(f(x)) > 0$ quand $x > 0$, donc $f(x) > 1$, ce qui prouve que la courbe est au-dessus de son asymptote (et c'est même vrai sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$).

5. Posons $h(x) = \ln(f(x))$ pour alléger les notations. Il s'agit de dériver le quotient $\frac{\sqrt{x+1} \ln(x+1)}{x}$, ce qui donne $h'(x) = \frac{\frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} \times x + \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} \times x - \sqrt{x+1} \ln(x+1)}{x^2}$
 $= \frac{x \ln(x+1) + 2x - 2(x+1) \ln(x+1)}{2x^2 \sqrt{x+1}} = \frac{2x - (x+2) \ln(x+1)}{2x^2 \sqrt{x+1}} = -\frac{(x+2)g(x)}{2x^2 \sqrt{x+1}}$. Notre dérivée est donc de signe opposé à celui de $g(x)$ sur $\mathcal{D}_f$ (tous les autres facteurs étant positifs).

On étudie donc la fonction g , qui est dérivable partout où ça nous intéresse : $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$. Cette nouvelle dérivée est toujours positive sur $] -1, +\infty[$, ce qui prouve la croissance de la fonction g . Comme on a $g(0) = 0$, on en déduit que g est négative sur $] -1, 0]$ puis positive sur $[0, +\infty[$. C'est le contraire pour f' , et on peut donc enfin dresser le tableau de variations complet de la fonction f :

x	-1	0	$+\infty$
f	1	e	1

6. Voici l'allure souhaitée (pas grand chose à placer en fait à part la tangente verticale en -1), on constate en faisant la courbe à l'ordi que la décroissance vers la limite 1 en $+\infty$ est très lente :



Exercice bonus

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (les racines cubiques existant pour tout réel), mais on peut quand même constater que $x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x+1)^2(x-1)$. Ainsi, f sera positive sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et négative sur $] -\infty, 1]$, avec une autre valeur d'annulation en -1 . Pour obtenir les variations de f , on peut se contenter d'étudier celles de $h : x \mapsto x^3 + x^2 - x - 1$ (la composition par la racine cubique qui est croissante sur $\mathbb{R}$ ne changera rien). Cette fonction h a pour dérivée $h'(x) = 3x^2 + 2x - 1$, trinôme de discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, qui s'annule en $x_1 = \frac{-2-4}{6} = -1$ et en $\frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$. On a déjà signalé plus haut que $f(-1) = 0$, calculons $f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1} = \sqrt[3]{-\frac{32}{27}} = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$. Bon, on ne sait pas exactement ce que vaut $\sqrt[3]{4}$, mais c'est quelque part entre 1 et 2, ce qui sera suffisant pour notre tracé de courbe (en pratique, $f\left(-\frac{1}{3}\right) \simeq -1$). Comme les limites de la fonction sont évidentes, on peut déjà dresser un tableau de variations pour f :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$-\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	0	$+\infty$

Pour étudier la convexité, pas d'autre choix que d'écrire complètement la dérivée de $f : f'(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{3(x^3 + x^2 - x - 1)^{\frac{2}{3}}}$. On constate d'ailleurs en passant que f n'est pas dérivable en -1 et en 1 , ce qui sera à noter sur la courbe (il y aura des tangentes verticales en ces deux points, même s'il y a un maximum local pour l'un des deux!). La dérivée seconde sera du signe de son numérateur, on se contentera donc d'écrire ce dernier, en éliminant également le facteur 3 du dénominateur tant qu'on y est : $(6x+2)(x^3+x^2-x-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}(x^3+x^2-x-1)^{-\frac{1}{3}}(3x^2+2x-1)^2 = \frac{3(6x+2)(x^3+x^2-x-1) - 2(3x^2+2x-1)^2}{3\sqrt[3]{x^3+x^2-x-1}}$. Encore une fois, contentons-nous de développer le numérateur (attention par contre, le dénominateur n'est pas toujours positif ici, il est en fait du signe de f) : $3(6x^4+8x^3-4x^2-8x-2) - 2(9x^4+4x^2+1+12x^3-6x^2-4x) = 18x^4+24x^3-12x^2-24x-6-18x^4-24x^3+4x^2+8x-2 = -8x^2-16x-8 = -8(x+1)^2$. Ah, enfin une bonne

nouvelle, ce numérateur est tout le temps négatif, et f'' est donc de signe opposé à f . La fonction f est donc convexe sur $] - \infty, -1[$ et sur $] - 1, 1[$ (il vaut mieux séparer en -1 puisque f ne sera pas dérivable à cet endroit-là), et concave sur tout l'intervalle $[1, +\infty[$.

On peut passer à l'étude asymptotique, en posant comme d'habitude $X = \frac{1}{x}$ pour avoir une variable X qui tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$ (ici les deux calculs peuvent être menés simultanément sans problème). On calcule donc $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{X^3} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} - 1} = \frac{1}{X} \sqrt[3]{1 + X - X^2 - X^3}$. On pose alors $u = X - X^2 - X^3$, qui tend toujours vers 0, et on effectue un DL de la racine cubique à l'ordre 2 (normalement, ça devrait suffire) de $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2) = 1 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{9}X^2 + o(X^2) = 1 + \frac{1}{3}X - \frac{4}{9}X^2 + o(X^2)$. On en déduit donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{X} + \frac{1}{3} - \frac{4}{9}X + o(X) = x + \frac{1}{3} - \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. La courbe admet donc une asymptote oblique d'équation $y = x + \frac{1}{3}$ à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, $f(x) - \left(x + \frac{1}{3}\right) \sim -\frac{4}{9x}$, qui est positif du côté de $-\infty$ (la courbe sera donc localement au-dessus de son asymptote de ce côté), mais négatif du côté de $+\infty$ (la courbe sera localement en-dessous de l'asymptote). Si on indique correctement les tangentes verticales, on obtient une courbe assez bizarre :

