

# Devoir Surveillé n° 8

MPSI Lycée Camille Jullian

28 mars 2026

## Exercice 1

Pour tout cet exercice, on se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Déterminer pour chacun des sous-ensembles de  $E$  suivants s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $E$ , et si c'est le cas, donner la dimension et une base de ce sous-espace. Si l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, on le justifiera en donnant un contre-exemple.

- $F_1 = \{M \in E \mid M \text{ a au moins un coefficient nul} \}$ .
- $F_2 = \{M \in E \mid \text{tous les coefficients de } M \text{ situés en-dehors des coins sont nuls} \}$ .
- $F_3 = \{M \in E \mid \text{les coefficients de } M \text{ situés sur une même ligne sont toujours égaux} \}$ .
- $F_4 = \{M \in E \mid M^T = 2M + 2I_3\}$ .
- $F_5 = \{M \in E \mid M^T = 2M\}$ .
- $F_6 = \{M \in E \mid M \text{ est inversible} \}$ .
- $F_7 = \{M \in E \mid M \text{ est nilpotente} \}$ .
- $F_8 = \{M \in E \mid AM = MA\}$ , où on a posé  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- $F_9 = \{M \in E \mid P^{-1}MP \text{ est diagonale} \}$ , où on a posé  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 2

On se place cette fois-ci dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^4$ , dans lequel on introduit les notations suivantes :  $u_1 = (1, 2, 0, 1)$ ,  $u_2 = (1, -1, 1, 1)$ ,  $u_3 = (0, 2, -1, -2)$ ,  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ , et  $G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y + z - t = y - 2z + t = 0\}$ .

1. Montrer que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est libre, en déduire la dimension de  $F$ .
2. Compléter la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  en une base de  $E$ .
3. Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , préciser sa dimension et donner une base de  $G$ .
4. Les sous-espaces  $F$  et  $G$  peuvent-ils être supplémentaires? Sans le calculer explicitement, déterminer la dimension minimale de  $F \cap G$ .
5. Donner une base de  $F \cap G$  (cette fois-ci on a le droit de calculer!).
6. Montrer que la famille constituée des deux vecteurs  $v_1 = (-3, 2, 1, 0)$  et  $v_2 = (2, -1, 0, 1)$  est une base de  $G$ .
7. Montrer que  $\text{Vect}(u_1, u_2)$  et  $\text{Vect}(v_1, v_2)$  sont supplémentaires dans  $E$ .
8. Calculer les coordonnées du vecteur  $(1, 2, 3, 4)$  dans la base  $(u_1, u_2, v_1, v_2)$ .

### Exercice 3

On cherche dans cet exercice à étudier les solutions de l'équation  $x + \ln(x) = n$ , où  $n$  est un entier naturel non nul.

1. Étudier rapidement la fonction  $f : x \mapsto x + \ln(x)$  (on tracera une allure de sa courbe représentative).
2. Montrer que l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution, qu'on notera désormais  $u_n$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
4. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{n}{2} < u_n < n$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
5. Montrer rigoureusement que  $u_n \sim n$ .
6. On définit une suite auxiliaire  $(v_n)$  en posant  $v_n = \frac{n - u_n}{\ln(n)}$ .
7. Montrer que  $v_n = 1 + \frac{\ln(\frac{u_n}{n})}{\ln(n)}$ . En déduire la limite de  $(v_n)$  puis un équivalent de l'écart entre  $v_n$  et sa limite (on doit réussir à obtenir un écart équivalent à  $-\frac{1}{n}$ ).
8. En déduire un développement asymptotique de  $u_n$  contenant trois termes d'ordres de grandeur distincts.
9. Reprendre les calculs pour obtenir le terme suivant de ce développement asymptotique.

### Exercice 4

On va étudier dans cet exercice la fonction définie par  $f(x) = (x+1)^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. La fonction  $f$  est-elle prolongeable par continuité en  $-1$ ? Si oui, la courbe de  $f$  admet-elle une tangente à cet endroit?
3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  en 0. En déduire la possibilité d'un prolongement par continuité en 0, la présence d'une tangente à la courbe en ce point, et la position relative locale de la courbe et de cette tangente.
4. Montrer que  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ , et en déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . La courbe de  $f$  admet-elle une asymptote en  $+\infty$ ? Si oui, quelle est la position relative locale de la courbe et de cette asymptote?
5. Calculer la dérivée de  $\ln(f)$  et montrer qu'elle est du même signe que la fonction  $g : x \mapsto \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$ . Étudier les variations de la fonction auxiliaire  $g$ , et en déduire les variations de  $f$ .
6. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction  $f$  tenant compte de tous les calculs effectués.

### Exercice bonus

Étudier le plus complètement possible la fonction  $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + x^2 - x - 1}$  (variations, convexité, asymptotes et position relative, courbe).