

Devoir Surveillé n° 7 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

7 mars 2026

Exercice 1

1. (a) Allons-y :

- Pour $n = 1$, on a un seul choix : une brique verticale, donc $u_1 = 1$.
- Pour $n = 2$, c'est dit dans l'énoncé, $u_2 = 2$.
- Pour $n = 3$, on peut faire trois briques verticales, un bloc horizontal suivi d'une brique verticale, ou une verticale suivi de deux horizontales, ce qui donne $u_3 = 3$.
- Pour $n = 4$, on peut faire quatre briques verticales, deux blocs horizontaux, ou caser un seul bloc horizontal à trois endroits différentes (à gauche, au milieu ou à droite), ce qui donne $u_4 = 5$.
- Pour $n = 5$, il y a une seule possibilité avec cinq briques verticales, trois avec deux blocs horizontaux (on peut mettre la brique verticale tout à gauche, au milieu ou tout à droite), et quatre avec un seul bloc horizontal (on met zéro, une, deux ou trois briques verticales avant le bloc horizontal), ce qui donne au total $u_5 = 8$. De toute façon, ceux qui se seront trompés à cette question avaient clairement oublié de lire la question suivante avant de traiter celle-ci.

(b) Si on veut construire un mur de longueur $n+2$, on a deux possibilités : on place une brique verticale puis on complète avec un mur de longueur $n+1$ (on a donc u_{n+1} possibilités de ce type), soit on met un bloc horizontal et on complète avec un mur de longueur n (on a donc u_n possibilités de ce type). Les deux cas étant mutuellement incompatibles, on en déduit trivialement $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

(c) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, et il s'agit même de la suite de Fibonacci (légèrement décalée). L'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 5$ et pour racines $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. On en déduit que $u_n = Ax_1^n + Bx_2^n$. On va poser $u_0 = 1$ (cohérent avec la relation de récurrence) pour simplifier le calcul des coefficients : $u_0 = 1 = A + B$ et $u_1 = 1 = Ax_1 + Bx_2$, donc $B = 1 - A$ et $1 = A(x_1 - 1 - x_2) + x_2$, soit $A = \frac{1 - x_2}{x_1 - 1 - x_2}$. Or, $x_1 + x_2 = 1$, donc $1 - x_2 = x_1$, et $x_1 - x_2 = \sqrt{5}$, donc $A = \frac{x_1}{\sqrt{5}}$, puis $B = \frac{\sqrt{5} - x_1}{\sqrt{5}} = -\frac{x_2}{\sqrt{5}}$. Finalement, on obtient la superbe formule $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})$. C'est moche mais ça donne effectivement les valeurs entières voulues.

2. (a) On a trois couleurs possibles pour chaque brique, les répétitions sont évidemment possibles (sinon on aura du mal à peindre tout le mur), et l'ordre est important, on va utiliser des listes. Il y a 3^{12} possibilités.
- (b) Il faut simplement choisir les deux couleurs, puis peindre avec ces deux couleurs, ce qui diminue le nombre de choix à deux pour chaque brique, soit au total $\binom{3}{2} \times 2^{12} = 3 \times 2^{12}$ possibilités.
- (c) Le plus simple est de peindre les briques dans l'ordre, par exemple de gauche à droite. On a trois couleurs possibles pour la première brique, mais seulement deux pour la suivante

(on veut éviter la couleur utilisée pour sa voisine de gauche), puis à nouveau deux pour chacune des briques suivantes, soit 3×2^{11} possibilités.

- (d) On choisit par exemple les quatre briques vertes, puis les quatre briques bleues parmi celles qui ne sont pas encore peintes, et on n'aura plus le choix pour les briques oranges, soit $\binom{12}{4} \times \binom{8}{4} = \frac{12!}{4!^3}$ possibilités. On pouvait aussi utiliser la technique du calcul de nombre d'anagrammes pour cette question.
- (e) Puisqu'on ne sait pas le nombre de briques orange, on fait tous les cas possibles pour le nombre de briques bleues (six au maximum si on veut autant de vertes) et on additionne tout : $\binom{12}{0}\binom{12}{0} + \binom{12}{1}\binom{11}{1} + \binom{12}{2}\binom{10}{2} + \binom{12}{3}\binom{9}{3} + \binom{12}{4}\binom{8}{4} + \binom{12}{5}\binom{7}{5} + \binom{12}{6}\binom{6}{6} = 1 + 12 \times 11 + \frac{12!}{2!2!8!} + \frac{12!}{3!3!6!} + \frac{12!}{4!4!4!} + \frac{12!}{5!5!2!} + \frac{12!}{6!6!}$. On n'essaiera pas d'aller plus loin dans la simplification.
- (f) Par passage au complémentaire, on enlève les cas où il n'y a aucune brique orange (2^{12} possibilités) et ceux où il y en a exactement une (12×2^{11} , il faut choisir quand même où est la brique orange), soit au total $3^{12} - 2^{12} - 12 \times 2^{11}$ possibilités.
- (g) Pour chaque bloc, on a $3!$ possibilités (il faut choisir l'ordre des couleurs), donc au total 6^4 possibilités.

Exercice 2

- On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (limite classique de taux d'accroissement), exactement ce qu'il nous faut pour effectuer le prolongement demandé.
- Puisque $|\sin(x)| \leq 1$, on a certainement, quand $x \neq 0$, $|f(x)| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$, ce qui suffit à prouver que f est bornée sur les deux intervalles $] -\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, où elle est en valeur absolue inférieure ou égale à 1. De plus, f est désormais continue sur le segment $[-1, 1]$, donc y est bornée (et elle y atteint même ses bornes, c'est le théorème du maximum). Elle est donc bornée sur trois intervalles dont la réunion est égale à $\mathbb{R}$ tout entier, donc bornée sur $\mathbb{R}$.
- Calculons : $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.
- On souhaite montrer que f est dérivable en 0 et calculer la valeur de $f'(0)$.
 - Si on pose $z(x) = \sin(x) - x$, la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $z'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$, donc z est décroissante. Comme $z(0) = 0 - 0 = 0$, cela suffit à prouver que z est négative sur $[0, +\infty[$ et donc que $\sin(x) \leq x$ sur cet intervalle.
 - La fonction g est évidemment dérivable autant de fois qu'on le souhaite, et $g'(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2}$ puis $g''(x) = -\sin(x) + x$. Comme on vient de voir, g'' est positive sur $[0, +\infty[$ (ce serait le contraire sur $] -\infty, 0]$ par imparité de la fonction), donc g est convexe sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, la courbe représentative de la fonction g est située au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle. Or, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, ce qui prouve que la tangente à la courbe de g à l'origine a pour équation $y = x$, et permet donc de démontrer que $g(x) \geq x$.
 - En combinant les deux questions précédentes, $-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) - x \leq 0$, donc, $\forall x > 0$, $-\frac{x}{6} \leq \frac{\sin(x) - x}{x^2} \leq 0$. Un simple théorème des gendarmes permet alors d'obtenir $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$. De l'autre côté de 0, la limite étudiée étant celle d'une fonction impaire, on aura également une limite nulle.

- (d) Le taux d'accroissement de f en 0 a pour expression $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2}$. Les calculs précédents montrent que ce taux d'accroissement a une limite nulle en 0, et donc que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
5. (a) Puisque $f(k\pi) = f((k+1)\pi) = 0$, c'est une application immédiate du théorème de Rolle.
- (b) La fonction h est dérivable, et $h'(x) = \cos(x) - x \sin(x) - \cos(x) = -x \sin(x)$. Si k est un entier pair, $\sin(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, donc h' est négative sur tout l'intervalle. Si k est impair, $\sin(x) \leq 0$, donc h' est positive. La fonction h est donc toujours monotone sur ces intervalles (si on veut être complet, $h(k\pi) = \pm k\pi$ et $h((k+1)\pi) = \pm(k+1)\pi$ en fonction de la parité de k).
- (c) La fonction h est égale à un facteur près à f' , et s'annule exactement une fois sur les intervalles $[k\pi, (k+1)\pi]$ puisqu'elle est bijective sur chacun de ces intervalles, avec des valeurs de signe opposé aux deux extrémités de l'intervalle. Plus précisément, si k est pair, alors h et f' sont positives sur $[k\pi, a_k]$ puis négatives sur $[a_k, (k+1)\pi]$, donc f est croissante sur $[k\pi, a_k]$ puis décroissante sur $[a_k, (k+1)\pi]$. Si k est impair, c'est le contraire, f sera décroissante sur $[(k+1)\pi, a_{k+1}]$ puis croissante sur $[a_{k+1}, (k+1)\pi]$. Rappelons tout de même que ces résultats sont valables uniquement si $k \geq 1$ (on peut prouver que f est décroissante sur tout l'intervalle $[0, \pi]$ mais ce n'était pas demandé dans l'énoncé).
6. On a déjà constaté plus que, $\forall x > 1$, $f(x) < \frac{1}{x} < 1$, donc aucun réel strictement supérieur à 1 ne peut vérifier $f(x) = x$. De même, il ne peut pas y avoir de point fixe sur $] -\infty, -1]$. Les seuls points fixes éventuels sont donc sur l'intervalle $[-1, 1]$. Il est temps d'étudier les variations de f sur cet intervalle : $h'(x) = -x \sin(x) < 0$ sur $]0, 1]$, donc h est décroissante sur $[0, 1]$. Or, $h(0) = 0$, donc h et f' sont négatives sur $[0, 1]$, ce qui prouve la décroissance de f sur cet intervalle. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est a fortiori décroissante sur $[0, 1]$ (comme somme de fonctions décroissantes), donc bijective de $[0, 1]$ vers $[f(1) - 1, f(0)]$. Comme $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) - 1 = \frac{\sin(1)}{1} - 1 = \sin(1) - 1 < 0$, 0 appartient à l'intervalle image, et f admet un unique point fixe sur $[0, 1]$. De plus, les valeurs prises par f sur $[0, 1]$ sont positives, donc sur $[-1, 0]$ aussi (puisque f est paire), ce qui empêche l'existence d'un autre point fixe sur $[-1, 0]$.
7. (a) On a déjà prouvé la stabilité de $[0, 1]$ à la question précédente (f est décroissante, $f(0) = 1$ et $f(1) > 0$), le fait que $u_n \in [0, 1]$ en découle par récurrence triviale.
- (b) Posons bêtement $u(x) = h(x) - \frac{x^2}{2} = x \cos(x) - \sin(x) - \frac{x^2}{2}$. La fonction u est dérivable et $u'(x) = h'(x) - x = -x(\sin(x) + 1)$, qui est du signe de $-x$ puisque $\sin(x) + 1 \geq 0$. La fonction u admet donc en 0 un maximum égal à $u(0) = 0$, elle est donc toujours négative, ce qui prouve que $h(x) \leq \frac{x^2}{2}$. Pour obtenir l'inégalité avec une valeur absolue, posons de même $v(x) = h(x) + \frac{x^2}{2}$. La fonction v est dérivable, et $v'(x) = x - x \sin(x) = x(1 - \sin(x))$ qui est cette fois-ci du signe de x . Autrement dit, v admet pour minimum $v(0) = 0$, est toujours positive, et on en déduit $h(x) \geq -\frac{x^2}{2}$, puis $|h(x)| \leq \frac{x^2}{2}$. Il suffit de diviser par x^2 pour en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- (c) On applique bien entendu l'IAF à $x = u_n$ et $y = \alpha$ et on obtient immédiatement la première inégalité souhaitée (notons d'ailleurs que la détermination d'un intervalle stable n'avait ici strictement aucun intérêt puisque la majoration de la dérivée est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier). La deuxième inégalité se prouve par une récurrence facile : $|u_0 - \alpha| = \alpha$, donc la propriété est vraie au rang initial. Si elle est vraie au rang n , alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\alpha}{2^{n+1}}$, ce qui prouve l'hérédité.

- (d) On a $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}$. Par application directe du théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 3

1. A l'aide de la relation de récurrence, $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$, puis $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 2X - X = 4X^3 - 3X$ (on remarque déjà le lien avec les formules de duplication et de triplication du cosinus), et enfin $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 8X^4 - 6X^2 - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. Il semblerait bien que T_n soit de degré n et de coefficient dominant 2^n , ce qu'on va prouver par récurrence double (on prouve les deux propriétés simultanément pour simplifier la rédaction). La propriété est manifestement vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$ (et même jusqu'à $n = 4$ d'après les calculs de la question précédente). Si on la suppose vraie au rang n et au rang $n + 1$, alors $-T_n$ est un polynôme de degré n et $2XT_{n+1}$ un polynôme de degré $n + 2$, donc T_{n+2} est de degré $n + 1$ (pas de risque d'annulation des termes dominants quand on additionne deux polynômes de degrés distincts). De plus, le coefficient dominant de T_{n+2} est le double de celui de T_{n+1} , soit $2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$, ce qui prouve bien la propriété au rang $n + 2$ et achève donc la récurrence double.
3. On constate que $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Une récurrence double triviale permet alors de prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1$: si $T_n(1) = T_{n+1}(1) = 1$, alors $T_{n+2}(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$.
4. Encore une récurrence double facile : on conjecture que T_n est pair lorsque n est pair et impair lorsque n est impair. C'est le cas notamment pour $n = 0$ et $n = 1$. Si on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$, alors $2XT_{n+1}$ a une parité opposée à celle de T_{n+1} (on multiplie par $2X$ qui est impair), donc la même parité que T_n . On constate alors que T_{n+2} est la somme de deux polynômes de même parité, donc a lui-même la même parité que T_n , ce qui prouve l'hérédité de la récurrence (même pas besoin de distinguer deux cas en fonction de la parité de n).
5. On fixe donc l'entier $n \geq 2$ (sinon il n'y a en gros rien à prouver) et on fait une récurrence double « partielle » sur p , dans la mesure où on s'arrêtera à $p = n$. Pour $p = 0$, $2T_nT_0 = 2T_n = T_n + T_n$ est évidemment vraie. Pour $n = 1$, la formule affirme que $2XT_n = T_{n+1} + T_{n-1}$, ce qui est exactement la relation de récurrence définissant les polynômes T_n (elle est simplement décalée d'un indice), donc la propriété est aussi vraie. Supposons désormais qu'on a à la fois $2T_nT_p = T_{n+p} + T_{n-p}$, et $2T_nT_{p+1} = T_{n+p+1} + T_{n-p-1}$, alors en exploitant la définition de la suite avec l'indice p , $2T_nT_{p+2} = 4XT_nT_{p+1} - 2T_nT_p$. En utilisant les deux hypothèses de récurrence, on en déduit que $2T_nT_{p+2} = 2X(T_{n+p+1} + T_{n-p-1}) - T_{n+p} - T_{n-p} = (2XT_{n+p+1} - T_{n+p}) + (2XT_{n-p-1} - T_{n-p})$. Or, $2XT_{n+p+1} - T_{n+p} = T_{n+p+2}$ (définition de la suite à l'indice $n+p$), et $2XT_{n-p-1} - T_{n-p} = T_{n-p-2}$ (définition à l'indice $n-p-2$), donc $2XT_{n+p-1} - T_{n-p} = T_{n-p-2}$, ce qui permet d'obtenir $2T_nT_{p+2} = T_{n+p+2} + T_{n-p-2}$ et de prouver notre hérédité.
6. Pour changer, on va faire une récurrence double sur l'entier n , mais il faut faire attention à énoncer correctement la propriété $P_n : \forall p \in \mathbb{N}, T_n \circ T_p = T_{np}$ (il est très rare de faire intervenir un quantificateur universel dans l'énoncé d'une propriété qu'on va prouver par récurrence, mais ici la quantification porte sur p , pas sur le n qui va varier pendant la démonstration). La propriété est trivialement vraie pour $n = 0$ puisque la composée du polynôme constant égal à 1 par n'importe quel polynôme donnera toujours un résultat constant égal à 1 (si vous n'êtes pas convaincus, réfléchissez mieux). D'ailleurs, la propriété est tout aussi évidente pour $n = 1$: comme $T_1 = X$, si on remplace X par T_p dans l'expression de T_1 , on obtient simplement T_p , ce qui signifie bien que $T_1 \circ T_p = T_p$ (là encore, ce sera vrai en remplaçant T_p par un polynôme quelconque). Supposons désormais que ça marche aux rang n et $n + 1$, alors $T_{n+2} \circ T_p = (2XT_{n+1}) \circ T_p - T_n \circ T_p = 2T_p \times T_{n+1} \circ T_p - T_n \circ T_p = 2T_pT_{np+p} - T_{np}$. Or, en exploitant la question précédente, $2T_pT_{np+p} = T_{np+2p} + T_{np}$, donc on obtient bien $T_{n+2} \circ T_p = T_{np+2p} = T_{(n+2)p}$.

On peut donc en déduire que $T_4 = T_2 \circ T_2 = 2T_2^2 - 1 = 2(2X^2 - 1)^2 - 1 = 2(4X^4 - 4X^2 + 1) - 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$, ce qui est bien l'expression obtenue à la première question.

7. Pour changer, une récurrence double fonctionne très bien. Au rang 0, $T_0(\cos(x)) = 1 = \cos(0x)$ est vrai puisque $\cos(0) = 1$. Au rang 1, l'égalité est complètement triviale. Si on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$, alors $T_{n+2}(\cos(x)) = 2\cos(x)T_{n+1}(\cos(x)) - T_n(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx)$. Or, on sait bien sûr tous que $\cos(nx) + \cos((n+2)x) = 2\cos\left(\frac{n+n+2}{2} \times x\right)\cos\left(\frac{n-n-2}{2} \times x\right) = 2\cos((n+1)x)\cos(x)$, donc $2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx) = \cos((n+2)x)$, ce qui achève la preuve de l'hérédité.

On en déduit aisément que, si $y = \cos(x)$, alors $T_n \circ T_p(y) = T_n(\cos(px)) = \cos(np x) = T_{np}(y)$. Ceci prouve donc que $T_n \circ T_p$ et T_{np} sont deux polynômes dont les valeurs coïncident sur tout l'intervalle $[-1, 1]$ (intervalle dans lequel on peut écrire tout élément y sous la forme $\cos(x)$). Comme cet intervalle est infini, un corollaire vu en cours permet de conclure que les deux polynômes sont égaux.

8. Les résultats de la question précédente montrent que, si $\cos(nx) = 0$, alors $\cos(x)$ est racine du polynôme T_n . Or, pour tout entier k , $\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc tous les réels de la forme $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ vérifient $\cos(nx) = 0$, et les nombres de la forme $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ sont tous racines du polynôme T_n . Attention tout de même, il y a plein de valeurs qui se répètent parmi ces cosinus. Si on se limite à des valeurs de k appartenant à $\{0, 1, \dots, n-1\}$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in]0, \pi[$, intervalle sur lequel la fonction cosinus est injective (strictement décroissante). Les cosinus correspondants sont donc deux à deux distincts, ce qui nous donne n racines distinctes du polynôme T_n . Celui-ci étant de degré n , il ne peut pas avoir plus de racines, et toutes ses racines sont réelles et simples. Comme de plus, il a pour coefficient dominant 2^n , on peut donc le factoriser sous la forme $T_n = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$. Par exemple, $T_2 = 2\left(X - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(X - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}\right) = 2X^2 - 1$.

Exercice 4

- Par définition, $L_0 = Q_0 = (X^2 - 1)^0 = 1$. Ensuite, $Q_1 = X^2 - 1$, et $L_1 = \frac{1}{2}Q'_1 = \frac{1}{2} \times 2X = X$. Enfin, $Q_2 = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$, donc $Q'_2 = 4X^3 - 4X$, puis $Q''_2 = 12X^2 - 4$. On en déduit $L_2 = \frac{1}{4 \times 2}Q''_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$.
- Le polynôme Q_n est très clairement de degré $2n$ et de coefficient dominant égal à 1. Quand on va le dériver n fois, ce coefficient dominant sera successivement multiplié par $2n$, puis $2n-1$ etc, jusqu'à un facteur $n+1$, ce qui donnera donc un nouveau coefficient dominant égal à $\frac{(2n)!}{n!}$, et bien sûr un degré égal à n . On en déduit que L_n est un polynôme de degré n , dont le coefficient dominant est égal à $\frac{1}{2^n n!} \times \frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$.
- Les polynômes Q_n sont tous pairs. Quand on dérive un polynôme pair, il devient impair, et vice versa. Le polynôme $Q_n^{(n)}$ est donc de même parité que n , et L_n également.
- De fait, puisque $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, on peut écrire $Q_n = (X+1)^n(X-1)^n$, produit auquel on va pouvoir appliquer la formule de Leibniz pour obtenir une expression de L_n . Commençons pour cela par calculer les dérivées des deux facteurs : en posant $P_1 = (X+1)^n$, on a $P'_1 = n(X+1)^{n-1}$, $P''_1 = n(n-1)(X+1)^{n-2}$ et plus généralement $P_1^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$.

(résultat suffisamment simple et classique pour qu'on puisse se permettre de ne pas rédiger la récurrence théoriquement indispensable pour démontrer la formule). Exactement de la même façon, on aura, en notant $P_2 = (X-1)^n$, $P_2^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}$ (les deux formules étant valables pour tout entier $k \leq n$). On peut désormais appliquer Leibniz : $L_n = \frac{1}{2^n n!} (P_1 P_2)^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_1^{(k)} P_2^{(n-k)} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (X+1)^{n-k} \times \frac{n!}{k!} (X-1)^k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k} (X-1)^k$. Si on évalue cette magnifique expression pour $X = 1$, le seul terme non nul de la somme est celui pour lequel $(X-1)$ est élevé à une puissance nulle, donc le terme correspondant à $k = 0$. Puisque $\binom{n}{0}^2 = 1$, on en déduit que $L_n(1) = \frac{1}{2^n} \times (1+1)^n = 1$. De même, si on évalue pour $X = -1$, le seul terme non nul dans la somme est le dernier (avec un coefficient binomial en facteur lui aussi égal à 1), et on obtient $L_n(-1) = \frac{1}{2^n} \times (-1-1)^n$, expression qui vaut 1 lorsque n est pair, mais -1 quand n est impair. Autrement dit, $L_n(-1) = (-1)^n$ (on pouvait aussi exploiter la parité des polynômes obtenue à la question précédente pour déduire $L_n(-1)$ de $L_n(1)$).

5. (a) Puisque $Q_n = (X-1)^n(X+1)^n$, il a pour seules racines 1 et -1 , toutes les deux avec multiplicité n .
- (b) Puisque -1 et 1 sont racines de multiplicité n , elles vont rester racines de $Q_n^{(k)}$ tant que $k \leq n-1$, ce qui permet de faire le raisonnement itératif suivant :
 - $Q_n(-1) = Q_n(1) = 0$, donc il existe une valeur d'annulation de Q'_n dans l'intervalle $] -1, 1[$ d'après le théorème de Rolle. Notons cette valeur a .
 - $Q'_n(-1) = Q'_n(a) = Q'_n(1) = 0$, donc en appliquant le théorème de Rolle deux fois au polynôme Q'_n (sur l'intervalle $[-1, a]$ et sur l'intervalle $[a, 1]$), il existe deux réels vérifiant $-1 < b_1 < b_2 < 1$ tels que $Q''_n(b_1) = Q''_n(b_2) = 0$.
 - Puisque Q''_n a désormais quatre racines $(-1, b_1, b_2, 1)$, on peut appliquer trois fois le théorème de Rolle pour obtenir trois réels vérifiant $-1 < c_1 < c_2 < c_3 < 1$ et annulant tous les trois Q'''_n .
 - On obtient ainsi à chaque nouvelle étape k valeurs d'annulation distinctes du polynôme $Q_n^{(k)}$ tant que $k \leq n$ (on a besoin d'avoir $k-1 < n$ pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle en ayant $Q_n^{(k-1)}(-1) = Q_n^{(k-1)}(1) = 0$).

La dernière étape de la récurrence ci-dessus montre que $Q_n^{(n)}$ s'annule en n valeurs distinctes toutes comprises strictement entre -1 et 1 , donc L_n également. Comme L_n est un polynôme de degré n , il ne peut bien sûr pas admettre d'autres racines que celles-ci.

- (c) Il n'y absolument rien à faire : on connaît le coefficient dominant et toutes les racines de L_n , il suffit d'appeler celles-ci $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ pour conclure (bien sûr, on n'est pas capable de calculer ces racines par contre).
6. Si P est un polynôme de degré au plus n , alors $(X^2-1)P'$ est de degré au plus $n-1$, donc sa dérivée de degré au plus n , ce qui prouve la stabilité demandée.
7. Pour avoir $((X^2-1)P')' = 0$, il faut que $(X^2-1)P'$ soit un polynôme constant. Or, $(X^2-1)P'$ est de degré au moins 2, sauf si $P' = 0$ (auquel cas on a évidemment $\varphi(P) = 0$). Les seuls polynômes du noyau sont donc les polynômes constants.
8. Pour $n = 0$, $L_0 = 1$ et $\varphi(1) = 0$, donc $\lambda_0 = 0$. Ensuite, pour $n = 1$, $L_1 = X$, donc $L'_1 = 1$ et $\varphi(L_1) = (X^2-1)' = 2X = 2L_1$, donc $\lambda_1 = 2$. Enfin, $L_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$, donc $L'_2 = 3X$, puis $\varphi(L_2) = (3X^3 - 3X)' = 9X^2 - 3 = 6\left(\frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}\right) = 6L_2$, donc $\lambda_2 = 6$.

9. En dérivant directement, $Q'_n = n \times 2X \times (X^2 - 1)^{n-1}$, donc on a bien $(X^2 - 1)Q'_n = 2nx(X^2 - 1)^n = 2nXQ_n$. Si on dérive $n + 1$ fois cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, à gauche, le facteur $X^2 - 1$ a pour dérivée $2X$, pour dérivée seconde 2 et toutes ses dérivées ultérieures s'annulent, ce qui donne une dérivée du produit égale à $\binom{n+1}{0}(X^2 - 1)Q_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{1}2XQ_n^{(n)} + \binom{n+1}{2}2Q_n^{(n-1)} = (X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + 2(n+1)XQ_n^{(n+1)} + n(n+1)Q_n^{(n)}$. De l'autre côté de notre égalité, c'est encore plus simple puisque le facteur $2nX$ a des dérivées nulles à partir de la dérivée seconde. Il ne reste donc cette fois-ci de la formule de Leibniz que les deux termes $\binom{n+1}{0}2nXQ_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{1}2nQ_n^{(n)} = 2nXQ_n(n+1) + 2n(n+1)Q_n^{(n)}$. Puisque les deux dérivées calculées sont censées être égales, on a $(X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + 2(n+1)XQ_n^{(n+1)} + n(n+1)Q_n^{(n)} = 2nXQ_n(n+1) + 2n(n+1)Q_n^{(n)}$, soit $(X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + 2XQ_n^{(n+1)} = n(n+1)Q_n^{(n)}$. Autrement dit, en posant $H_n = Q_n^{(n)}$, on a $(X^2 - 1)H_n'' + 2XH_n' = n(n+1)H_n$, soit exactement $\varphi(H_n) = n(n+1)H_n$. Comme L_n est égal à H_n à un facteur multiplicatif près (qui se répecturera dans les calculs de dérivée et de dérivée seconde), on a donc également $\varphi(L_n) = n(n+1)L_n$, ce qui est cohérent avec les trois exemples calculés à la question précédente. On aura bientôt un vocabulaire précis pour désigner ce genre de phénomène : on dira que L_n est un vecteur propre de l'application linéaire φ , associé à la valeur propre $n(n+1)$.