

Devoir Surveillé n° 7

MPSI Lycée Camille Jullian

7 mars 2026

Exercice 1

Les deux questions de l'exercice sont complètement indépendantes l'une de l'autre.

1. Votre professeur de mathématiques préféré souhaite construire un muret autour de son jardin. Il dispose pour cela de briques de 2 décimètres de long et d'un décimètre de large. Comme il est très paresseux, il cherche simplement à construire un mur de deux décimètres de haut, qui sera donc constitué de successions de briques verticales, ou de paires de briques superposées horizontalement. Il y a ainsi deux façons de construire un mur de longueur 2 : soit deux briques verticales, soit un bloc de deux briques horizontales. On notera pour la suite u_n le nombre total de façons de créer un mur de longueur n .
 - (a) Donner la valeur de u_n pour tous les entiers $n \in \{1, 2, \dots, 5\}$.
 - (b) Démontrer rigoureusement que, $\forall n \geq 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
 - (c) Obtenir une formule explicite pour u_n .
2. Finalement, mes talents en maçonnerie étant très limités, j'ai fait construire mon mur de longueur 12 par un professionnel, qui a décidé de n'aligner que des briques verticales. Pour égayer un peu le jardin, je décide de peindre chacune de ces 12 briques avec une des trois couleurs suivantes : orange, bleu ou vert (toutes les briques doivent être peintes). Donner le nombre total de possibilités dans chacun des cas suivants (les applications numériques ne sont évidemment **pas** demandées) :
 - (a) Aucune contrainte sur les couleurs utilisées.
 - (b) En fait, on ne veut utiliser que deux couleurs sur les trois (mais on ne sait pas lesquelles).
 - (c) On ne veut jamais avoir deux briques successives de la même couleur.
 - (d) On veut exactement quatre briques de chaque couleur.
 - (e) On veut autant de briques bleues que de briques vertes (mais pas forcément autant que de briques orange).
 - (f) Il y a au moins deux briques orange dans le mur.
 - (g) Si on sépare le mur en quatre blocs de trois briques chacun, tous ces blocs ont exactement une brique de chaque couleur.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on pose $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

1. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On continuera par la suite à noter f la fonction prolongée, désormais définie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer rigoureusement que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$.
4. On souhaite montrer que f est dérivable en 0 et calculer la valeur de $f'(0)$.
 - (a) Montrer que, $\forall x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$.
 - (b) Étudier la convexité de la fonction $g : x \mapsto \sin(x) + \frac{x^3}{6}$. En déduire que, $\forall x \geq 0$, $\sin(x) + \frac{x^3}{6} \geq x$.
 - (c) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$. Que vaut la limite de ce même quotient à gauche de 0 ?
 - (d) Exploiter les calculs précédents pour montrer que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$.
5. On souhaite désormais étudier les variations de la fonction f .
 - (a) Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer qu'il existe un réel $a_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $f'(a_k) = 0$.
 - (b) Étudier les variations de la fonction $h : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$ sur l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$.
 - (c) En déduire que a_k est unique, puis étudier les variations de f sur $[k\pi, (k+1)\pi]$.
6. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe, qu'on notera désormais α , et justifier que $\alpha \in]0, 1[$.
7. On définit enfin une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f , en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq \frac{x^2}{2}$, en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 - (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, et en déduire que $|u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}$.
 - (d) En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3

Les polynômes de Tchebychev sont définis par récurrence double de la façon suivante : $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. Donner l'expression des polynômes T_2 , T_3 et T_4 .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n (on justifiera évidemment).
3. Calculer la valeur de $T_n(1)$ pour tout entier n .
4. Étudier la parité des polynômes T_n .
5. Montrer par récurrence double sur l'entier p que, $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2$, si $p \leq n$, alors $2T_n T_p = T_{n+p} + T_{n-p}$.
6. Montrer que, sans condition sur p et n , $T_n \circ T_p = T_{np}$. Retrouver alors la valeur de T_4 en calculant $T_2 \circ T_2$.
7. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. Retrouver plus facilement le résultat de la première partie de la question 6.
8. Montrer que le polynôme T_n est toujours scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. Donner sa factorisation explicite.

Exercice 4

Pour tout entier naturel n , on pose $Q_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)}$ (il s'agit bien ici d'une dérivée n -ème).

1. Calculer L_0 , L_1 et L_2 .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n , en déduire ceux de L_n .
3. Étudier la parité des polynômes L_n .
4. En partant de l'écriture $Q_n = (X + 1)^n (X - 1)^n$, écrire L_n comme combinaison linéaire de polynômes de la forme $(X + 1)^k (X - 1)^{n-k}$. En déduire les valeurs de $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
5. On cherche dans cette question à factoriser le polynôme L_n .
 - (a) Préciser les racines de Q_n , ainsi que leur multiplicité.
 - (b) À l'aide d'applications répétées du théorème de Rolle, montrer que L_n admet n racines distinctes qui appartiennent toutes à l'intervalle $] -1, 1[$ (une rédaction peu rigoureuse sera tolérée pour cette question).
 - (c) En déduire que $L_n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$, où $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 1$.
6. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P) = ((X^2 - 1)P')' = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.
Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ , quel que soit l'entier naturel n .
7. Déterminer le noyau de φ , c'est-à-dire l'ensemble des polynômes P vérifiant $\varphi(P) = 0$.
8. Vérifier l'existence de réels λ_n tels que $\varphi(L_n) = \lambda_n L_n$ lorsque $n \in \{0, 1, 2\}$.
9. En partant de la relation $(X^2 - 1)Q'_n = 2nXQ_n$ et en la dérivant $n + 1$ fois, montrer que la propriété énoncée à la question précédente reste vraie pour tout entier naturel n .