Devoir Surveillé n$^\text{o}$ 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

31 janvier 2026

Exercice 1

1. Avec l'indication généreusement fournie, on obtient immédiatement $2\ 026 = 2 \times 1\ 013$, avec $1\ 013$ premier. En effet, comme cet entier est impair, il ne doit avoir qu'un seul facteur premier, donc être de la forme p^k avec p premier. Il faudrait alors théoriquement vérifier que $1\ 013$ n'est pas le carré, ni le cube etc d'un nombre premier, ou simplement vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à 31 (puisque $32^2 = 1\ 024 > 1\ 013$). C'est bien le cas (allez, précisons un peu : $31^2 = 961 < 1\ 013$ qui n'est donc pas un carré parfait ; $10^3 = 1\ 000$ et $11^3 = 1\ 331$ donc $1\ 013$ n'est pas un cube parfait ; $5^4 = 625$ et $6^4 = 1\ 296$ donc $1\ 013$ n'est pas une puissance quatrième parfaite ; ces calculs prouvent déjà qu'il ne reste plus comme candidats potentiels que des puissances plus élevées de 3 ou 5, mais $1\ 013$ n'est divisible ni par 3 ni par 5).

   Concernant $2\ 025$, on constate facilement qu'il est divisible par 3 et 5, ce qui donne l'identité des deux facteurs premiers recherchés. On calcule de fait $2\ 025 = 3 \times 675 = 3^2 \times 225 = 3^3 \times 75 = 3^4 \times 25 = 3^4 \times 5^2$.
2. Soit on exploite les décompositions de la première question (ils n'ont aucun facteur premier en commun, donc sont premiers entre eux), soit on constate encore plus simplement que $1 \times 2\ 026 - 1 \times 2\ 025 = 1$ est une relation de Bézout démontrant que $2\ 026 \wedge 2\ 025 = 1$.
3. On a simplement $2\ 026x - 2\ 025y = 42 \Leftrightarrow 2\ 026(x - x_0) - 2\ 025(y - y_0) = 42 - (2\ 026x_0 - 2\ 025y_0)$. Comme on a fait l'hypothèse que $2\ 026x_0 - 2\ 025y_0 = 42$, on obtient bien l'équation équivalente (E') pour le couple $(x - x_0, y - y_0)$.
4. En repartant du constat que $2\ 026 - 2\ 025 = 1$, on peut brillamment multiplier par 42 pour obtenir $42 \times 2\ 026 - 42 \times 2\ 025 = 1$. Le couple $(42, 42)$ est donc une solution particulière triviale.
5. Si (x, y) est solution de (E'), alors $2\ 025x = 2\ 026y$, donc $2\ 026$ divise $2\ 025x$. D'après le théorème de Gauss, $2\ 026$ étant premier avec $2\ 025$, on a nécessairement $2\ 026$ qui divise x, donc $x = k \times 2\ 026$, avec $k \in \mathbb{Z}$. De façon complètement symétrique $y = k' \times 2\ 025$, avec $k' \in \mathbb{Z}$. En reportant dans l'équation, on doit avoir $k \times 2\ 025 \times 2\ 026 = k' \times 2\ 026 \times 2\ 025$, donc $k = k'$. Réciproquement, tout couple de la forme $(2\ 025k, 2\ 026k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est trivialement solution de (E').
6. D'après la question 3, un tel couple est de la forme $(42 + x, 42 + y)$ avec (x, y) solution de E'. Finalement, $\mathcal{S} = \{(2\ 025k + 42, 2\ 026k + 42) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2

1. Si M est inversible, on peut simplement multiplier l'équation par M^{-1} pour obtenir $M = I_n$, qui est donc l'unique solution inversible.
2. On constate facilement que $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ (dans ce cas, la matrice est diagonale, le calcul est donc immédiat), et que, si $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0$ (la seule ligne non nulle de $E_{i,j}$ est la ligne i, avec

un 1 en j-ème position qui ne coïncidera jamais avec le 1 en i-ème position des colonnes de cette même matrice). Il faut donc avoir $i = j$ pour que $E_{i,j}$ soit solution de (E).

3. On a déjà vu à la question précédente que $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ et $E_{i_j}^2 = 0$. On calcule de même $E_{i,i} \times E_{i,j} = E_{i,j}$ (le seul produit non nul est celui de la i-ème ligne de $E_{i,i}$ qui contient un 1 en i-ème position, et de la j-ème colonne de $E_{i,j}$, qui contient aussi un 1 en i-ème position), mais $E_{i,j} \times E_{i,i} = 0$ (cette fois-ci, les 1 ne sont pas en position compatible pour être multipliés entre eux). En développant bêtement, on a donc $(E_{i,i}+E_{i_j})^2 = E_{i,i}^2+E_{i,i}E_{i,j}+E_{i,j}E_{i,i}+E_{i,j}^2 = E_{i,i} + E_{i,j}$. La matrice est bien solution de (E).
4. On écrit par exemple $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d-c \end{pmatrix} = (a-b)E_{1,1} + b(E_{1,1} + E_{1,2}) + c(E_{2,1} + E_{2,2}) + (d-c)E_{2,2}$, qui est une combinaison linéaire de quatre matrices solutions de (E).
5. En posant comme tout à l'heure $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on calcule brutalement $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & d^2+bc \end{pmatrix}$. Si la matrice A est solution de (E), on a donc en particulier $b(a+d) = b$ et $c(a+d) = c$. Distinguons quelques cas :

   - si $a + d \neq 1$, on doit avoir $b = c = 0$, autrement dit A diagonale. A est alors solution si et seulement si $a^2 = a$ et $d^2 = d$, donc $(a, d) \in \{0, 1\}^2$. On trouve donc quatre solutions dans cette catégorie : 0, I_2, $E_{1,1}$ et $E_{2,2}$. Ces quatre matrices ont bien une trace égale à 0, 1 ou 2.
   - si $a + d = 1$, la matrice est de trace 1, ce qui prouve déjà que la trace ne peut prendre que les trois valeurs déjà obtenues. Les deux équations $b(a + d) = b$ et $c(a + d) = c$ sont automatiquement vérifiées, il reste les deux autres équations $a^2+bc = a$ et $d^2+bc = d$. On doit donc avoir $bc = a-a^2 = d-d^2$. Mais comme $d = 1-a$, $d-d^2 = 1-a-(1-a)^2 = a-a^2$, donc les deux équations sont équivalentes. Dans le cas très particulier où $a = 0$ ou $a = 1$ (et donc $d = 1$ ou $d = 0$), $a-a^2 = 0$, et l'un des coefficients b et c doit être nul, l'autre pouvant prendre n'importe quelle valeur. On trouve donc comme solutions toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$.
   - enfin, si $a + d = 1$ et $a \notin \{0, 1\}$, on a des solutions de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$. Un exemple d'une telle matrice : $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$.

   Parmi toutes ces matrices, il y en a une seule vérifiant $\mathrm{Tr}(A) = 2$, c'est la matrice identité I_2. Il y en d'ailleurs également une seule de trace nulle, c'est la matrice nulle. Toutes les autres ont une trace égale à 1.
6. (a) Comme d'habitude, je vais résoudre le système équivalent $\begin{cases} x + y = a \\ x - y + 2z = b \\ y + z = c \end{cases}$. En effectuant subtilement l'opération $L_2-L_1+2L_3$, on trouve immédiatement $4z = b-a+2c$, soit $z = -\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c$, dont on déduit $y = c-z = \frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c$, et $x = a-y = \frac{3}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}c$. La matrice P est donc inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) En s'attendant à obtenir une matrice diagonale, on calcule $AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On notera classiquement

D cette belle matrice diagonale, et on remarque $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$. Si A était inversible, D le serait aussi (comme produit de trois matrices toutes inversibles). Or, ce n'est clairement pas le cas puisque D contient une ligne complète de 0. De même, $D^2 = D$ (trivialement) donc $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

(c) On sait que $A^2 = A$, donc $A(I_3 - A) = 0$. Si $I_3 - A$ était inversible, on pourrait multiplier cette égalité par son inverse, ce qui impliquerait $A = 0$. Comme ce n'est évidemment pas vrai, la matrice $I_3 - A$ ne peut pas être inversible.

(d) Une façon de faire le calcul : on constate que $(A+I_3)\times A = A^2+A = 2A$ puisque $A^2 = A$. On en déduit que $(A+I_3)\times(A-2I_3) = 2A-2A-2I_3 = -2I_3$, donc $(A+I_3)\times\left(I_3 - \frac{1}{2}A\right) = I_3$, ce qui prouve que $A + I_3$ est inversible et que $(A + I_3)^{-1} = I_3 - \frac{1}{2}A$.

(e) Même pas besoin de s'embêter ici avec un binôme de Newton, on constate facilement que $(I_3 - A)^2 = I_3 - 2A + A^2 = I_3 - A$. On en déduit que toutes les puissances (autres que la puissance nulle) seront égales à $I_3 - A$ (récurrence triviale).

7. La matrice diagonale vérifiera elle-même $D^2 = D$ (puisque $D^2 = (P^{-1}MP)^2 = P^{-1}M^2P = P^{-1}MP$). Pour une matrice diagonale, c'est équivalent à avoir des coefficients diagonaux égaux à 0 ou 1. On en déduit directement que $\text{Tr}(M) \in \{0, 1, 2, 3\}$ en fonction de nombre de coefficients égaux à 1. De même, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on aura $\text{Tr}(M) \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Exercice 3

1. Si f est constante égale à k, on doit donc avoir $k = k^2$, soit $k \in \{0, 1\}$. Réciproquement la fonction nulle et la fonction égale à 1 sont solutions.
2. On fixe un valeur de y pour laquelle $f(y) \neq 0$ (une telle valeur existe puisqu'on a supposé que f n'était pas la fonction nulle) et on obtient à l'aide de la condition (C) appliquée à x et $-x$ les deux équations $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y)$ et $f(\sqrt{x^2+y^2} = f(-x)f(y)$. Avec l'hypothèse $f(y) \neq 0$, on en déduit $f(-x) = f(x)$, ce qui prouve la parité de la fonction f.
3. En appliquant la condition (C) pour $x = y = 0$, on a $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$. Si on suppose que $f(0) = 0$, appliquer la condition (C) a un réel x quelconque et à $y = 0$ donne $f(\sqrt{x^2}) = 0$, donc $f(|x|) = 0$. Mais f étant paire, on en déduit $f(x) = 0$ quel que soit le signe de x, et f est donc la fonction nulle. Comme on a fait l'hypothèse que f n'est pas nulle, la seule possibilité restante est $f(0) = 1$.
4. Procédons par récurrence. Pour $n = 0$, on a bien $f(u_0) = f(a) = 0$ par hypothèse. Supposons désormais $f(u_n) = 0$ et appliquons la condition (C) avec $x = y = u_{n+1}$. On calcule alors $\sqrt{2u_{n+1}^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{2^{n+1}}} = \sqrt{\frac{a^2}{2^n}} = u_n$, et on en déduit que $0 = f(u_{n+1})^2$, ce qui implique bien entendu $f(u_{n+1}) = 0$ et prouve l'hérédité de notre récurrence.

   Sous l'hypothèse $f(a) = 0$, on a donc construit une suite (u_n) vérifiant bien entendu $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$ puisque cette suite est identiquement nulle. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et, par continuité de f en 0, on devrait donc avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(0) = 1$, ce qui est une contradiction flagrante. La fonction f ne peut donc pas s'annuler sur $]0, +\infty[$, ni d'ailleurs sur $]-\infty, 0[$ puisqu'elle est paire. Elle ne s'annule donc jamais.
5. Si $a > 0$, on applique la condition (C) à $x = y = \frac{a}{\sqrt{2}}$ pour obtenir $f(a) = f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \geqslant 0$ (c'est exactement le même calcul qu'à la question précédente, pour $n = 0$). Comme f ne peut pas s'annuler, on a donc $f(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. On conclut à nouveau en invoquant la parité de f.

6. (a) On vient de prouver que f était à valeur strictement positives, donc $f(\sqrt{x}) > 0$ sur $[0, +\infty[$, ce qui prouve que g est bien définie sur cet intervalle. La continuité est triviale (composition de fonctions continues).
   (b) Calculons $g(x)g(y) = \ln(f(\sqrt{x})) + \ln(f(\sqrt{y})) = \ln(f(\sqrt{x})f(\sqrt{y})) = \ln(f(\sqrt{\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2})) = \ln(f(\sqrt{x+y})) = g(x+y)$, en utilisant la condition (C) en cours de calcul.
   (c) C'est une récurrence triviale exploitant la question précédente. Pour $n = 0$, $g(0) = \ln(f(0)) = \ln(1) = 0$, donc la propriété est vérifiée. Et si on la suppose vraie au rang n, alors $g((n+1)x) = g(nx + x) = g(nx) + g(x) = ng(x) + g(x) = (n+1)g(x)$.
   (d) Supposons $x = \dfrac{p}{q}$, avec p et q deux entiers strictement positifs. Alors $g(qx) = g(p) = pg(1)$, et par ailleurs $g(qx) = qg(x)$, donc $qg(x) = pg(1)$, puis $g(x) = \dfrac{p}{q}g(1) = xg(1)$.
   (e) Notons $a = g(1)$, on sait déjà que $g(x) = ax$ pour tout nombre x rationnel positif. Si x est un réel positif non rationnel, il est limite d'une suite (x_n) de nombres rationnels, donc $g(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} ax_n = ax$, ce qui prouve que $g(x) = ax$ sur $[0, +\infty[$ tout entier.
   (f) Puisque $g(x) = ax = \ln(f(\sqrt{x}))$, on a $f(\sqrt{x}) = e^{ax}$ pour tout réel positif, soit en faisant un minuscule changement de variable $f(x) = e^{ax^2}$. Par parité de f, cette expression reste valable sur $\mathbb{R}^-$. Réciproquement, toutes ces fonctions sont bien solutions (toutes les fonctions linéaires sont clairement solutions de l'équation vérifiée par g), et on retrouve en particulier la fonction constante égale à 1 lorsque $a = 0$. Il faut par contre ajouter à cet ensemble la fonction nulle qui n'en fait pas partie.

Exercice 4

1. (a) On cherche donc à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 6y & = & 2x \\ x & - & y & = & 2y \end{array}\right.$. Les deux équations sont équivalentes, et donnent donc l'unique condition $x = 3y$. Autrement dit, les solutions sont tous les couples de la forme $(3y, y)$, avec $y \in \mathbb{R}$. On prendra comme solution particulière non nulle le couple $(3, 1)$.
   (b) Il s'agit cette fois de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 6y & = & x \\ x & - & y & = & y \end{array}\right.$. À nouveau, les deux équations sont équivalentes et donnent $x = 2y$. Les solutions sont donc de la forme $(2y, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$, et on prendre $(2, 1)$ comme solution particulière.
   (c) On pose donc $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour s'amuser un peu, calculons l'inverse en passant par le calcul de $P^2 = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. On constate que $P^2 = 4P - I_3$, donc $I_3 = P(4I_3 - P)$, ce qui prouve que P est inversible et $P^{-1} = 4I_3 - P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (d) Un calcul palpitant donne $AP = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, puis $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (e) Aucune méthode n'est imposée, mais on va quand même reprendre la diagonalisation qui vient d'être effectuée. On montre comme d'habitude par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. C'est trivialement vrai pour $n = 0$ (on a la matrice identité des deux côtés), et si on le suppose au rang n, alors $PD^{n+1}P^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = A^nA = A^{n+1}$ en exploitant l'hypothèse de récurrence et le fait que $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$. Il ne reste alors plus qu'à calculer $PD^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n & 2 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & 6 - 3 \times 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

2. (a) Si $M^2 = D$, alors $MD = DM = M^3$, donc M et D commutent. Or, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, un calcul idiot donne $MD = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $DM = \begin{pmatrix} 2a & 2c \\ b & d \end{pmatrix}$. On en déduit que $MD = DM$ si $b = c = 0$. La matrice M est donc diagonale, avec des coefficients diagonaux donc les carrés sont égaux respectivement à 2 et 1, donc $M = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (quatre solutions distinctes).

(b) Si $M^2 = D$, alors $PM^2P^{-1} = A$. En posant $B = PMP^{-1}$, on en déduit que $B^2 = A$. Réciproquement, toute matrice B vérifiant $B^2 = A$ est issue d'une matrice $M = P^{-1}BP$ vérifiant $M^2 = D$. Il y a donc quatre solutions à l'équation $B^2 = A$: $B_1 = P\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}-2 & 6-6\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $B_2 = -B_1 = \begin{pmatrix} 2-3\sqrt{2} & 6\sqrt{2}-6 \\ 1-\sqrt{2} & 2\sqrt{2}-3 \end{pmatrix}$, $B_3 = P\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}+2 & -6-6\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 & -2-3\sqrt{2} \end{pmatrix}$, et $B_4 = -B_3 = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}-2 & 6+6\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-1 & 2+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(c) Pas besoin de vraiment effectuer les calculs : les matrices solutions sont opposées deux à deux donc leur somme est nulle. De plus, comme $B_2 = -B_1$ et $B_1^2 = A$, $B_1B_2 = -A$. De même, $B_3B_4 = -A$ et $B_1B_2B_3B_4 = A^2$ (notons en passant que le produit ne dépend pas de l'ordre des calculs, ce qui n'a rien d'évident a priori).

3. (a) À l'aide de la formule obtenue plus haut pour A^n, on calcule facilement les coefficients : celui en haut à gauche vaut $3\sum_{k=0}^{n}(2t)^k - 2\sum_{k=0}^{n} t^k$, celui en haut à droite vaut $6\sum_{k=0}^{n} t^k - 6\sum_{k=0}^{n}(2t)^k$, pour celui en bas à gauche c'est $\sum_{k=0}^{n}(2t)^k - \sum_{k=0}^{n} t^k$ et pour le dernier en bas à droite $3\sum_{k=0}^{n} t^k - 2\sum_{k=0}^{n}(2t)^k$.

(b) En passant à la limite avec la formule donnée dans l'énoncé, évidemment valable pour $2t$ aussi bien que pour t, on trouve $E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t}-2e^t & 6e^t-6e^{2t} \\ e^{2t}-e^t & 3e^t-2e^{2t} \end{pmatrix}$. En particulier, on a $E(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, et $E(1) = \begin{pmatrix} 3e^2-2e & 6e-6e^2 \\ e^2-e & 3e-2e^2 \end{pmatrix}$.

(c) Bon, cette question est vraiment triviale, soyons honnête, elle n'était là que pour donner les matrices Q et R permettant de vérifier la validité des calculs précédents.

(d) Les calculs sont faciles : $QR = 0$, $RQ = 0$, $Q^2 = Q$ et $R^2 = R$.

(e) À l'aide des deux questions précédentes, $E(t)E(t') = (e^{2t}Q + e^tR)(e^{2t'}Q + e^{t'}R) = e^{2t+2t'}Q^2 + e^{2t+t'}QR + e^{t+2t'}RQ + e^{t+t'}R^2 = e^{2(t+t')}Q + e^{t+t'}R = E(t+t')$.

(f) C'est une récurrence facile. On a déjà vu plus haut que $E(0) = I_3 = (E(t))^0$, ce qui prouve la formule au rang initial. Si on la suppose vraie au rang n, alors d'après la question précédente $E(t)^{n+1} = E(t)^n \times E(t) = E(nt) \times E(t) = E((n+1)t)$, ce qui prouve l'hérédité.

(g) Les calculs déjà effectués montrent que $I_2 = E(0) = E(t-t) = E(t) \times E(-t)$, ce qui prouve que $E(t)$ est inversible et a pour inverse $E(-t)$.

(h) Supposons que $E(t) = E(t')$ pour deux réels distincts t et t'. Alors $E(t-t') = E(t) \times (E(t'))^{-1} = E(t) \times (E(t))^{-1} = I_2$. Or, $E(t-t')$ est une combinaison linéaire des matrices Q et R, et la seule combinaison de ces deux matrices donnant la matrice I_2 est la combinaison $Q+R$ (les coefficients hors de la diagonale montrent qu'on doit avoir le même facteur devant Q que devant R, et ceux de la diagonale montrent que ces coefficients sont égaux à 1), qui est atteinte lorsque $e^{2(t-t')} = e^{t-t'} = 1$. Autrement dit, il faut avoir $t - t' = 0$, donc $t = t'$, ce qui prouve que l'application est bien injective.

L'application n'est par contre par surjective, car il existe des tas de matrices qui ne sont pas du tout combinaisons linéaires des matrices Q et R. Par exemple, la matrice $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $aQ+bR$, car le coefficient nul en deuxième ligne première colonne imposerait $a = b$, et on aurait alors aussi un coefficient nul en haut à droite. Cette matrice ne peut donc pas être égale à une matrice $E(t)$.