Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 6

MPSI Lycée Camille Jullian

31 janvier 2026

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation (E) : $2\ 026x - 2\ 025y = 42$, avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers 2 025 et 2 026 (gros indice : chacun des deux n'a que deux facteurs premiers distincts).
2. Montrer que 2 025 et 2 026 sont premiers entre eux.
3. On suppose que (x_0, y_0) est une solution particulière de l'équation (E). Montrer que (x, y) est solution de (E) si et seulement si $(x - x_0, y - y_0)$ est solution de l'équation « homogène » (E') : $2\ 026x - 2\ 025y = 0$.
4. Donner une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).
5. Décrire le plus simplement possible l'ensemble des couples solutions de l'équation (E').
6. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice aux matrices carrées solutions de l'équation (E) : $M^2 = M$.

1. Quelles sont les matrices **inversibles** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = M$?
2. On note $E_{i,j}$ la matrice ayant tous ses coefficients nuls, sauf celui situé en ligne i et colonne j qui est égal à 1. À quelle condition sur i et j la matrice $E_{i,j}$ est-elle solution de l'équation (E) ?
3. Montrer que, si $i \neq j$, $E_{i,i} + E_{i,j}$ est solution de cette même équation.
4. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de solutions de l'équation (E).
5. Déterminer toutes les solutions de (E) dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (il y en a une infinité, le but est d'essayer de les décrire le plus simplement possible), et montrer que toutes ces matrices vérifient $\mathrm{Tr}(M) \in \{0, 1, 2\}$. Combien y a-t-il de solutions vérifiant $\mathrm{Tr}(M) = 2$?

6. On s'intéresse dans cette question au cas particulier $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$. La matrice A est-elle inversible ? Pourquoi le calcul précédent permet-il de dire que $A^2 = A$ sans avoir besoin de calculer explicitement A^2 ?
   (c) Montrer que la matrice $I_3 - A$ n'est pas inversible (**sans** faire de calcul compliqué).
   (d) Montrer que $I_3 + A$ est inversible, et exprimer son inverse en fonction de I_3 et de A (on ne demande pas une expression explicite de cette inverse).
   (e) Calculer les puissances entières de la matrice $I_3 - A$.
7. Dans le cas général, si on suppose que la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est solution de (E) et qu'elle est diagonalisable (donc qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $P^{-1}MP = D$), quelles sont les valeurs que peut prendre la trace de la matrice M ? Généraliser à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les mêmes conditions.

Exercice 3

On cherche à déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante (notée (C) par la suite) : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$.

1. Quelles sont les fonctions constantes vérifiant la condition (C) ?
2. On suppose pour toute la suite de l'exercice que f n'est pas la fonction nulle et vérifie la condition (C). Montrer que f est une fonction paire.
3. Montrer que $f(0) = 1$.
4. Supposons que a est un réel strictement positif vérifiant $f(a) = 0$. En posant $u_n = \frac{a}{\sqrt{2^n}}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?
5. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
6. Pour tout réel positif x, on pose $g(x) = \ln(f(\sqrt{x}))$.
   (a) Montrer que g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que g vérifie l'équation fonctionnelle suivante : $g(x + y) = g(x) + g(y)$.
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(nx) = ng(x)$.
   (d) Montrer que, si x est un nombre **rationnel** positif, $g(x) = xg(1)$.
   (e) En exploitant la densité des rationnels dans $\mathbb{R}^+$, en déduire l'existence d'un réel a tel que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = ax$.
   (f) En déduire toutes les fonctions f vérifiant la condition (C).

Exercice 4

On cherche à étudier dans cet exercice quelques propriétés de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calcul des puissances de A.
   (a) En posant $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, résoudre l'équation matricielle $AX = 2X$. Donner en particulier une solution **non nulle** de cette équation.
   (b) Résoudre de même l'équation $AX = X$, et en donner une solution non nulle.
   (c) On considère la matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les deux colonnes sont les solutions obtenues dans les deux questions précédentes. Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.
   (d) Calculer $P^{-1}AP$ (matrice diagonale qu'on notera D pour la suite de l'exercice).
   (e) Calculer A^n (on donnera explicitement les quatre coefficients de la matrice).
2. Calcul des racines carrées de A.
   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = D$. Montrer que $MD = DM$, en déduire les valeurs possibles de M.
   (b) En exploitant le fait que $D = P^{-1}AP$, déduire de la question précédente les racines carrées de A, c'est-à-dire les matrices B vérifiant $B^2 = A$.
   (c) Calculer la somme et le produit de toutes les solutions obtenues.
3. Exponentielle de la matrice tA. On admettra dans cette question la formule suivante : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!} = e^t$.
   (a) Pour tout entier naturel n, on pose $E_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!} A^k$. Écrire les coefficients de la matrice $E_n(t)$ sous forme de somme.
   (b) Calculer $E(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} E_n(t)$ (la limite d'une suite de matrices étant ici à prendre comme une limite calculée coefficient par coefficient). On précisera en particulier la valeur de $E(0)$ et de $E(1)$.
   (c) Montrer que $E(t) = e^{2t}Q + e^t R$, où $Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (d) Calculer les produits QR et RQ, ainsi que les carrés Q^2 et R^2.
   (e) Montrer que, $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2$, $E(t)E(t') = E(t + t')$.
   (f) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $(E(t))^n = E(nt)$.
   (g) Montrer que la matrice $E(t)$ est toujours inversible, et préciser la valeur de $E(t)^{-1}$.
   (h) Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & E(t) \end{array} \right.$ est injective. Est-elle surjective ?