Devoir Surveillé n$^\text{o}$ 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

10 janvier 2026

Exercice 1

1. La conjugaison complexe s correspond à une symétrie par rapport à l'axe réel. L'application r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine du repère. L'application r^2 est donc une rotation d'angle π et r^3 une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ autour de ce même point. Les trois applications $s \circ r$, $s \circ r^2$ et $s \circ r^3$ sont des réflexions (symétries par rapport à des droites) en tant que composées d'une symétrie et d'une rotation (ce sont nécessairement des isométries indirectes) : $s \circ r$ est une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$, $s \circ r^2$ est une symétrie par rapport à l'axe imaginaire (on a $r^2(z) = i(iz) = -z$, donc $s \circ r^2(z) = -\overline{z}$) et $s \circ r^3$ est une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2. Toutes ces applications étant des isométries complexes, elles sont trivialement bijectives. Les quatre réflexions (s, $s \circ r$, $s \circ r^2$ et $s \circ r^3$) sont leur propre réciproque. La réciproque de r est r^3 (puisque $r \circ r^3$ est une rotation d'angle 2π, donc égale à l'identité), et r^2 est également sa propre réciproque.
3. On l'a déjà dit à la question précédente : $r^4 = id$. Les trois composées $r \circ s$, $r^2 \circ s$ et $r^3 \circ s$ sont à nouveau nécessairement des réflexions. Plus précisément, puisque $r \circ s$ est une réflexion, $r \circ s = (r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1} = s \circ r^3$ (réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$). De même, $r^2 \circ s = s^{-1} \circ (r^2)^{-1} = s \circ r^2$, et $r^3 \circ s = s^{-1} \circ (r^3)^{-1} = s \circ r$ (réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$). Tous les élements de G sont de la forme $s^a \circ r^b$, avec $a \in \{0, 1\}$ et $b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si on compose deux tels éléments, on calcule donc $s^a \circ r^b \circ s^c \circ s^d$. Les calculs précédents montrent que $r^b \circ s^c = s^c \circ r^{b'}$ (avec toujours $b' \in \{0, 1, 2, 3\}$, ce qui donne une composée égale à $s^{a+b} \circ r^{b'+d}$. En utilisant le fait que $s^2 = r^4 = id$, on peut toujours simplifier les expressions pour obtenir une « puissance » de s égale à 0 ou 1, et une puissance de r inférieure ou égale à 3, donc un élément de G, qui est bien stable par composée.
4. L'ensemble G est non vide, il est stable par composition et par passage à la réciproque, c'est donc un sous-groupe de l'ensemble de toutes les applications bijectives sur $\mathbb{C}$, muni de la composition. Il n'est pas abélien puisque par exemple $s \circ r$ et $r \circ s$ ne sont pas égales.
5. Un sous-groupe à deux éléments dans un groupe est nécessairement constitué de l'élément neutre (ici id) et d'un élément égal à sa propre réciproque. On a donc pas moins de cinq sous-groupes à deux éléments pour le groupe G : $\{id, r^2\}$, $\{id, s\}$, $\{id, s \circ r\}$, $\{id, s \circ r^2\}$, $\{id, s \circ r^3\}$.
6. Le sous-ensemble H_1 est manifestement non vide, stable par composition (ce qui sera de toute façon vérifié dans la table de Cayley qu'on va faire ci-dessous), et stable par passage à la réciproque d'après les calculs effectués plus haut. C'est donc un sous-groupe de G. La table demandée :

$\circ$	id	r	r^2	r^3
id	id	r	r^2	r^3
r	r	r^2	r^3	id
r^2	r^2	r^3	id	r
r^3	r^3	id	r	r^2

7. Encore un ensemble non vide et stable par réciproque (tous les éléments de H_2 sont leur propre réciproque), dont la stabilité par composition va découler du tableau ci-dessous :

$\circ$	id	r^2	s	$s \circ r^2$
id	id	r^2	s	$s \circ r^2$
r^2	r^2	id	$s \circ r^2$	s
s	s	$s \circ r^2$	id	r^2
$s \circ r^2$	$s \circ r^2$	s	r^2	id

8. Supposons qu'il existe un isomorphisme f entre H_1 et H_2. Puisque tous les élements de H_2 sont égaux à leur propre récirpoque, on devrait donc avoir $(f(r))^2 = id$. Or, si f est un morphisme, cela revient à dire que $f(r^2) = id$, ce qui contredit l'injectivité de f (on aurait au moins deux éléments dans le noyau). Il n'est donc pas possible de créer un isomorphisme entre les deux sous-groupes.
9. Cette application f serait en fait un morphisme sur l'ensemble de toutes les isomtries de $\mathbb{C}$. En effet, la composée de deux isométries directes est directes, ce qui est cohérent avec le fait que, si f et g sont deux isométries directes, $\varphi(g \circ f) = 1 = 1 \times 1 = \varphi(g) \times \varphi(f)$. Si f et g sont toutes deux indirectes, $g \circ f$ sera directe, c'est à nouveau cohérent car $\varphi(g \circ f) = 1 = (-1) \times (-1) = \varphi(g) \times \varphi(f)$. Enfin, si l'une des deux isométries est directe et l'autre indirecte, on obtiendra une composée indirecte, et $-1 = (-1) \times 1 = 1 \times (-1)$.
10. Le noyau de φ est tout simplement constitué de toutes les isométries directes de G, donc $\ker(\varphi) = H_1$. Le morphisme φ n'est évidemment pas un isomoprhisme puisqu'il n'est pas injectif (noyau non réduit à l'élément neutre).

Exercice 2

1. Puisque le coefficient dominant du polynôme est égal à 1, on a simplement $z_1 + z_2 = 2a$ et $z_1 z_2 = b$.
2. (a) On cherche donc à résoudre l'équation du second degré $z^2 - (2+8i)z - 6 + 8i = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (2+8i)^2 - 4(8i-6) = 4 + 32i - 64 - 32i + 24 = -36$. Pas besoin de calculs compliqués pour obtenir une racine carrée de ce discriminant réel, $\delta = 6i$ conviendra fort bien. Les solutions de l'équation sont donc $z_1 = \dfrac{2+8i-6i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \dfrac{2+8i+6i}{2} = 1 + 7i$.

   (b) Les points sont symétriques si et seulement si ils ont même partie imaginaire et des parties réelles opposées, autrement dit si $z_2 = -\overline{z_1}$. Dans ce cas, $z_1 + z_2 = 2a$ est donc imaginaire pur. De plus, on doit avoir $z_1 z_2 = -z_1\overline{z_1} = -|z_1|^2 = b$, ce qui est manifestement impossible puisque b n'est pas réel négatif. La question était en fait posée de façon très surprenante, puisque la symétrie est impossible (en fait, cette question aurait du apparaître à un moment où la valeur de b n'était pas imposée égale à $-6 + 8i$).

(c) C'est tout aussi impossible qu'à la question précédente puisqu'on doit cette fois-ci avoir $z_2 = \overline{z_1}$, ce qui impose à nouveau que b soit un nombre réel (positif cette fois).

(d) Pour que le triangle soit isocèle rectangle en A, le point M_2 doit être l'image de M_1 par une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ autour du point a. Autrement dit, on doit avoir $z_2 - 2a = i(z_1 - 2a)$ ou $z_2 - 2a = -i(z_2 - 2a)$. Or, $z_2 = 2a - z_1$, donc le premier cas peut s'écrire $-z_1 = iz_1 - 2ia$, soit $z_1(i+1) = 2ia$, donc $z_1 = \frac{2i}{1+i}a = \frac{2i(1-i)}{2}a = (i+1)a$. Dans l'autre cas, $-z_1 = -iz_1 + 2ia$, donc $z_1 = \frac{2i}{i-1}a = \frac{2i(i+1)}{-2}a = (1-i)a$. Cela correpond bien aux deux relations données dans l'énoncé.

(e) Si $z_1 = (1+i)a$, alors $z_2 = 2a - z_1 = (1-i)a$, et inversement. En fait, les deux cas n'en constituent qu'un seul, avec permutation du rôle de z_1 et de z_2. Dans cet unique cas, donc, $b = z_1z_2 = a^2(1+i)(1-i) = 2a^2$. Avec la valeur de b choisie dans l'énoncé, cela implique $a^2 = \frac{b}{2} = -3+4i$. En posant $a = \alpha+i\beta$, on obtient les conditions $\alpha^2-\beta^2 = -3$ et $2\alpha\beta = 4$, auxquelles on ajoute l'équation aux modules $\alpha^2 + \beta^2 = |a|^2 = |-3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$. En additionnant et soustrayant comme d'habitude les deux équations faisant intervenir les carrés, on trouve $2\alpha^2 = 2$, donc $\alpha = \pm 1$ et $2\beta^2 = 8$ donc $\beta = \pm 2$. Puisque α et β sont de même signe, les deux valeurs possibles de a sont $a = 1+2i$ et $a = -1-2i$. Vérifions ce qui se passe dans ces deux cas : l'équation (E) du premier cas s'écrit $z^2-(2+4i)z-6+8i = 0$. Elle admet pour discriminant $\Delta = (2+4i)^2-4(8i-6) = 4+16i-16-32i+24 = 12-16i = -4(-3+4i) = -4a^2$. Une racine carrée de ce discriminant est $\delta = 2ia$, et les deux racines de l'équation sont donc $z_1 = \frac{2a-2ia}{2} = a(1-i)$ et $z_2 = \frac{2a+2ia}{2} = a(1+i)$, ce qui prouve que notre triangle est bien rectangle isocèle en A. Le deuxième cas est identique (le discriminant est le même) à permutation des racines près.

3. (a) On sait bien entendu que les racines de l'équation sont conjuguées si a et b sont réels et si le discriminant Δ est réel négatif, donc si $(-2a)^2 - 4b \leqslant 0$, soit $a^2 \leqslant b$ (ça fonctionne même dans le cas où $\Delta = 0$, puisque deux nombres **réels** identiques sont effectivement conjugués). Réciproquement, supposons que $z_2 = \overline{z_1}$, alors $2a = z_1 + z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1)$, donc $a = \mathrm{Re}(z_1)$ est réel, et $b = z_1z_2 = |z_1|^2$ est aussi réel, et même réel positif. De plus, on sait bien que $|\mathrm{Re}(z_1)| \leqslant |z_1|$, donc $|a| \leqslant \sqrt{b}$, ce qui implique bien $a^2 - b \leqslant 0$. La réciproque est donc démontrée, la condition est nécessaire et suffisante.

(b) On va noter simplement $r = r_1 = r_2$, et on suppose donc que $z_1 = re^{i\alpha}$ et $z_2 = re^{i\beta}$. On calcule alors $b = z_1z_2 = r^2e^{i(\alpha+\beta)}$ (commençons par le plus facile), et $2a = z_1 + z_2 = r(e^{i\alpha} + e^{i\beta})$. Par une factorisation par l'angle moitié, $a = \frac{r}{2}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}) = r_1 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$. On en déduit que $a^2 = r_1^2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\alpha+\beta)}$, puis que $\frac{a^2}{b} = \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Ce nombre est clairement réel, tout aussi clairement positif, et inférieur ou égal à 1 puisqu'un cosinus ne peut pas être plus grand que 1. On a par ailleurs supposé au tout début de l'exercice que $2a$ n'était pas nul, donc ce quotient non plus, ce qui prouve bien qu'il appartient à $]0,1]$.

(c) Le discriminant de l'équation (E) vaut $\Delta = 4a^2 - 4b = 4a^2\left(1 - \frac{b}{a^2}\right)$. Avec l'hypothèse faite, à savoir que $\frac{a^2}{b} \in]0,1]$, son inverse $\frac{b}{a^2}$ est un réel supérieur ou égal à 1, ce qui prouve que $1-\dfrac{b}{a^2}$ est un réel négatif. Une racine carrée de ce nombre est donc $i\sqrt{\dfrac{b}{a^2}-1}$, et comme $4a^2$ est par ailleurs manifestement le carré de $2a$, on peut poser $\delta = 2ai\sqrt{\dfrac{b}{a^2}-1}$ pour obtenir un nombre complexe (rappelons que a n'a aucune raison d'être réel) vérifiant $\delta^2 = \Delta$. Les racines de (E) sont alors (à échange près) $z_1 = a + ia\sqrt{\dfrac{b}{a^2}-1}$ et $z_2 = a - ia\sqrt{\dfrac{b}{a^2}-1}$. Après factorisation par a (indispensable car a n'est toujours pas réel), on calcule donc $|z_1| = |a| \times \sqrt{1+\dfrac{b}{a^2}-1} = |a|\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$. De même, $|z_2| = |a|\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$, donc on a bien $|z_1| = |z_2|$.

(d) On suppose donc cette fois que $z_1 = r_1e^{i\alpha}$ et $z_2 = r_2e^{i\alpha}$. On calcule alors $2a = (r_1+r_2)e^{i\alpha}$, donc $a^2 = \dfrac{(r_1+r_2)^2}{4}e^{2i\alpha}$. Par ailleurs, $\beta = r_1r_2e^{2i\alpha}$, donc $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{(r_1+r_2)^2}{4r_1r_2}$. Ce nombre est un quotient de réels strictement positifs (r_1 et r_2 sont des modules) donc il est lui-même réel positif. De plus, $(r_1+r_2)^2-4r_1r_2 = r_1^2+2r_1r_2+r_2^2-4r_1r_2 = r_1^2+r_2^2-2r_1r_2 = (r_1-r_2)^2 \geqslant 0$, ce qui prouve que $(r_1+r_2)^2 \geqslant 4r_1r_2$ et donc que leur quotient est un réel supérieur ou égal à 1.

(e) Le calcul de disriminant effectué plus haut reste toujours valable : $\Delta = 4a^2\left(1-\dfrac{b}{a^2}\right)$. Mais cette fois, on a supposé $a^2 \geqslant b$, donc $1-\dfrac{b}{a^2} \geqslant 0$, et on peut donc poser $\delta = 2a\sqrt{1-\dfrac{b}{a^2}}$ (avec toujours a complexe bien entendu). Très similairement au calcul précédent, on en déduit que $z_1 = a + a\sqrt{1-\dfrac{b}{a^2}}$ et $z_2 = a - a\sqrt{1-\dfrac{b}{a^2}}$. Il ne reste plus qu'à factoriser par a pour calculer les arguments : $\alpha = \arg(z_1) = \arg(a) + \arg\left(\sqrt{1-\dfrac{b}{a^2}}\right) = \arg(a)$ puisque le deuxième argument est celui d'un réel positif, donc nul (on travaille modulo 2π sans le dire, comme d'habitude quand on calcule des arguments). De même, $\beta = \arg(a) + \arg\left(\sqrt{1-\dfrac{b}{a^2}}\right) = \arg(a)$ puisque $1-\sqrt{1-\dfrac{b}{a^2}}$ est lui aussi un réel positif (la racine carrée étant celle d'un nombre inférieur à 1, elle est elle-même inférieure ou égale à 1). On a bien prouvé que $\alpha = \beta$.

(f) Avec les deux démonstrations qu'on vient d'effectuer, si $\dfrac{a^2}{b} = 1$, on aura à la fois $r_1 = r_2$ et $\alpha = \beta$, donc $z_1 = z_2$. C'est normal, puisque l'équation (E) s'écrit alors $z^2 - 2az + a^2 = 0$, soit $(z_a)^2 = 0$, et admet donc une racine double.

Exercice 3

A. Démonstration du théorème de Cesàro dans le cas monotone.

1. La suite (u_n) étant croissante et convergeant vers l, elle est nécessairement majorée par l (en effet, s'il existe un indice n_0 pour lequel $u_{n_0} > l$, on aura pour tous les entiers supérieurs à n_0 la minoration $u_n \geqslant u_{n_0} > l$, ce qui amène une contradiction en passant à la limite). On peut

alors majorer v_n : $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} l \leqslant \dfrac{(n+1)l}{n+1} = l$.

2. On va classiquement calculer $v_{n+1}-v_n = \dfrac{1}{n+2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1}\right)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k + \dfrac{1}{n+2}u_{n+1}$ en isolant le dernier terme de la première somme. Or, $\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, et on peut écrire le terme isolé $\dfrac{u_{n+1}}{n+2}$ sous la forme $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{n+1}$.

   On en déduit alors que $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{n+1} - u_k \geqslant 0$ par croissance de la suite (u_n) (tous les termes de la somme sont positifs). On a bien prouvé la croissance de la suite auxiliaire (v_n), et comme (v_n) est croissante et majorée par l (première question de l'exercice), elle converge effectivement vers une limite $l' \leqslant l$.

3. Par définition, $2v_{2n+1} = \dfrac{2}{2n+2}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_k$, donc $2v_{2n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_k - \dfrac{1}{n+2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k$. Par croissance de la suite (u_n), chaque terme de la somme est supérieur ou égal à u_n, donc $2v_{2n+1} - v_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} u_n = u_n$ (il y a bien $n+1$ termes dans la somme).

4. Si on passage à la limite dans l'inégalité prouvée à la question précédente (la sous-suite (v_{2n+1}) de la suite (v_n) converge vers la même limite que cette dernière), on obtient l'inégalité $2l' - l' \geqslant l$, donc $l' \geqslant l$. On savait déjà que $l' \leqslant l$, la conclusion s'impose donc : $l' = l$. On a donc prouvé que, si une suite est croissante et convergente, la suite des moyennes de ses premiers termes converge vers la même limite. Ce résultat est en fait vrai pour une suite convergente quelconque (sans hypothèse de monotonie), c'est ce résultat plus général qui constitue le théorème de Cesàro.

B. Une application du théorème de Cesàro.

1. C'est une récurrence complètement triviale : $a_0 > 0$ par hypothèse, et supposer $a_n > 0$ implique clairement $\dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}} > 0$ (le dénominateur étant lui-même bien défini et strictement positif).

2. Puisque la suite est à termes positifs, on peut étudier sa monotonie en calculant $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}} < 1$ (le dénominateur étant strictement supérieur à 1). On en déduit la décroissance stricte de la suite (a_n) et sa convergence, puisqu'elle est minorée par 0. En notant l sa limite, un passage à la limite dans la relation de récurrence donne $l = \dfrac{l}{\sqrt{1+l}}$, donc $l = 0$ ou $\sqrt{1+l} = 1$, ce qui ne laisse finalement que la possibilité $l = 0$. La suite (a_n) a donc une limite nulle.

3. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} + 1}{x^2} = \dfrac{x - 2(x+1) + 2\sqrt{1+x}}{2x^2\sqrt{1+x}}$

$= \dfrac{-x-2+2\sqrt{1+x}}{2x^2\sqrt{1+x}}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur. Or, puisque tout est positif, $2\sqrt{1+x} \leqslant x+2 \Leftrightarrow 4(1+x) \leqslant x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 0$, inégalité qui est toujours vérifiée. Ceci prouve que notre humérateur de f' est toujours négatif, et donc que f est bien décroissante sur $]0, +\infty[$.

4. (a) En effet, $\dfrac{\sqrt{1+a_n}}{a_n} - \dfrac{1}{a_n} = f(a_n)$. La suite (a_n) étant décroissante, on a pour tout entier nature n : $0 < a_{n+1} \leqslant a_n$, ce qui implique par décroissance de la fonction f que $b_{n+1} \geqslant b_n$, donc que la suite (b_n) est croissante.

   (b) Pas besoin de théorème compliqué, un simple produit par une quantité conjuguée suffit à conclure : $b_n = \dfrac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \dfrac{1+a_n-1}{a_n(\sqrt{1+a_n}+1)} = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+a_n}}$. On sait déjà que $\underset{n\to+\infty}{a}{}_n = 0$, on en déduit directement que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$.

5. (a) Par définition, $c_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$. Il s'agit d'une somme télescopique : $c_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_0}\right)$.

   (b) À un décalage d'indice près, la suite (c_n) correspond à la suite des moyennes des termes de la suite (b_n) (on fait simplement une moyenne sur n termes et pas sur $n+1$). Elle converge donc, d'après le théorème de Cesàro, vers la même limite que c_n : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{1}{2}$. Or, on vient de prouver que $\dfrac{1}{na_n} = c_n + \dfrac{1}{na_0}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{na_n} = \dfrac{1}{2}$ (le deuxième terme ayant clairement une limite nulle), puis $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 2$.

C. Une conséquence de l'application.

1. C'est à nouveau une récurrence triviale, qu'on ne va même pas se donner la peine de faire semblant de rédiger.
2. Comme $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} \geqslant 0$, la suite est croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers une limite $l \geqslant u_0 > 0$. Or, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on devrait avoir $l = l + \sqrt{l}$, donc $l = 0$. C'est manifestement impossible, ce qui prouve que (u_n) n'est pas majorée et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Si on pose intelligemment $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$, alors $a_0 > 0$, et surtout $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n+\sqrt{u_n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{u_n}}}} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}$. La partie B prouve alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$, donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{u_n}} = 2$. En passant au carré et à l'inverse, on trouve alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n^2} = \dfrac{1}{4}$ (ce qui est d'ailleurs une autre façon de prouver que (u_n) a une limite infinie).