Devoir Maison n° 7

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 4 février 2026

Exercice 1

Il existe de fait plein de méthodes différentes qui marchent. En voici trois envisageables avec ce qu'on a vu ensemble en cours :

- Méthode naïve : on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$. On conjecture alors assez facilement que toutes les puissances sont de la forme $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_n - 1 & a_n - 1 \\ a_n - 1 & a_n & a_n - 1 \\ a_n - 1 & a_n - 1 & a_n \end{pmatrix}$, pour un certain réel a_n. Démontrons-le par récurrence, ce qui nous donnera des informations sur les termes de la suite (a_n). C'est vrai pour $n = 0$ en posant $a_0 = 1$. Supposons la formule vraie au rang n, alors un calcul direct donne $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 4a_n - 2 & 4a_n - 3 & 4a_n - 3 \\ 4a_n - 3 & 4a_n - 2 & 4a_n - 3 \\ 4a_n - 3 & 4a_n - 3 & 4a_n - 2 \end{pmatrix}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ en posant simplement $a_{n+1} = 4a_n - 2$. La suite (a_n) est donc arithmético-géométrique. Son équation de point fixe $x = 4x - 2$ a pour solution $x = \frac{2}{3}$. On pose donc une suite auxiliaire définie par $v_n = a_n - \frac{2}{3}$, et on vérifie qu'elle est géométrique : $v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = 4a_n - 2 - \frac{2}{3} = 4a_n - \frac{8}{3} = 4v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = a_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, donc $v_n = \frac{\times 4^n}{3}$. On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{4^n + 2}{3}$. Autrement dit, $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$.
- Méthode classique vue en cours : on calcule là aussi A^2 (cf ci-dessus), et on constate que $A^2 = 5A - 4I_3$. On peut bien entendu construire ensuite des suites récurrentes pour exprimer A^n en fonction de A et de I_3, mais rédigeons plutôt avec des divisions euclidiennes de polynômes. On constate facilement que $P = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ (s'il y en a vraiment besoin, on calcule un petit discriminant pour obtenir les racines). On effectue alors la division du monôme X^n par le polynôme P. Le reste en sera un polynôme de degré 1, on peut donc écrire $X^n = PQ_n + a_nX + b_n$. En évaluant cette égalité pour les racines 1 et 4 (qui annulent P donc le produit PQ_n), on obtient les deux équations $1 = a_n + b_n$ et $4^n = 4a_n + b_n$. En soustrayant ces équations, on trouve $3a_n = 4^n - 1$, donc $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$, puis $b_n = 1 - a_n = \frac{4 - 4^n}{3}$. On a donc $X^n = PQ_n + \frac{4^n - 1}{3}X + \frac{4 - 4^n}{3}$. Il ne reste plus qu'à évaluer cette égalité pour la matrice A (qui vérifie elle aussi $P(A) = 0$, donc $P(A)Q_n(A) = 0$), ce qui donne tout simplement $A^n = \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 4^n}{3}I_3$. On retrouve bien sûr les mêmes coefficients pour la matrice si on l'écrit explicitement.
- pour les plus masochistes, on peut aussi exploiter le binôme de Newton : on écrit $A = I_3 + J$, où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On montre facilement par

récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $J^n = 3^{n-1}J$ (calcul déjà effectué en exercice). Les matrices I_3 et J commutent évidemment, donc $A^n = (J+I_3)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k I_3^{n-k} = I_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}J$ (la formule appliquée n'étant valable qu'à partir de $k=1$, on est obligés d'isoler le premier terme de la somme). Quitte à diviser par 3, on reconnaît un quasi-binôme de Newton : $\sum_{k=0}^{n} 3^k = (3+1)^n = 4^n$, donc $\sum_{k=1}^{n} 3^k = 4^n - 1$. On en déduit finalement que $A^n = I_3 + \dfrac{4^n-1}{3}J$. Là encore, on reconstitue aisément tous les coefficients de la matrice A^n.

Si on veut vérifier la validité des formules obtenues pour $n=-1$, on peut le faire à partir de la matrice explicite, mais aussi en repartant de la formule obtenue par la deuxième méthode : pour $n=-1$, on devrait avoir $A^{-1} = \dfrac{\frac{1}{4}-1}{3}A + \dfrac{4-\frac{1}{4}}{3}I_3 = -\dfrac{1}{4}A + \dfrac{5}{4}I_3$. Or, puisque $A^2 = 5A - 4I_3$, on a bien $I_3 = \dfrac{1}{4}A(5I_3 - A)$, ce qui donne la même formule pour A^{-1}. Si on tient à l'écrire explicitement, $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, et on vérifie très facilement que $A^{-1}A = I_3$. Même méthode pour $n=-2$, on obtient $A^{-2} = -\dfrac{5}{16}A + \dfrac{21}{16}I_3$, soit $A^{-2} = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix}$. Il s'agit bien du carré de la matrice A^{-1} obtenue juste avant, donc la formule reste valable pour $n=-1$. Essayons enfin de voir ce que ça donne avec $n = \dfrac{1}{2}$. Les calculs sont simples puisque $\sqrt{4} = 2$, et ça donne la formule théorique $A^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}A + \dfrac{2}{3}I_3$, donc $A^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, dont le carré est bel et bien égal à la matrice A. Bref, tout marche !

Exercice 2

1. Il suffit d'étudier la fonction $z : x \mapsto x\ln(x)$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$. Cette fonction z est évidemment dérivable sur tout cet intervalle, et vérifie $z'(x) = \ln(x) + 1 > 0$, donc z est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Comme $z(1) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} z(x) = +\infty$, la fonction z est donc bijective de $]1,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$. En particulier, l'équation $z(x) = 1$ a bien une unique solution sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

2. Là encore, la fonction est clairement dérivable, et $f'(x) = \dfrac{e^x\ln(x) - \frac{e^x}{x}}{\ln^2(x)} = \dfrac{e^x(x\ln(x)-1))}{x\ln^2(x)}$. Cette dérivée est du signe de $x\ln(x) - 1 = z(x) - 1$. Elle est donc positive quand $z(x) \geqslant 1$, soit sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]1,\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha,+\infty[$, et admet bien un minimum en α. Sans chercher à être plus précis, on aura $\beta = \dfrac{e^\alpha}{\ln(\alpha)} = \alpha e^\alpha$ puisque par définition $\alpha\ln(\alpha) = 1$.

3. La question précédente montre que la fonction f est bijective de $[\alpha,+\infty[$ vers $[\beta,+\infty[$ (on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée). Tout réel $x \geqslant \beta$ admet donc un antécédent par la fonction f sur $[\alpha,+\infty[$, qu'on peut décider de noter $h(x)$. On a alors par définition $f(h(x)) = x$, donc $\dfrac{e^{h(x)}}{\ln(h(x))} = x$, ce qui est équivalent à la relation donnée dans l'énoncé. On fait exactement la même chose pour définir la fonction g, mais en constatant cette fois que f est bijective de $]1,\alpha]$ vers le même intervalle $[\beta,+\infty[$ (cette fois-ci, le calcul de la limite de f en 1 est immédiat).

4. C'est en fait très simple : g et h sont les réciproques respectives de la restriction de f aux intervalles $]1, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elles ont donc la même monotonie que f sur ces intervalles, et des limites « inversées », soit :

x	1		α
g	$\|\| +\infty$	$\searrow$	β

x	α		$+\infty$
h	β	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3

1. Si on veut vraiment en faire une démonstration rigoureuse, on définit pour tout réel positif a la fonction f_a par $f_a(x) = \sqrt{a+x}$. Chacune des fonctions f_a est croissante sur $[0, +\infty[$ de façon évidente. Or, $u_n = f_{a_0} \circ f_{a_1} \cdots \circ f_{a_n}(0)$, et $u_{n+1} = f_{a_0} \circ f_{a_1} \cdots \circ f_{a_n}(\sqrt{a_{n+1}})$. Toute composée de fonctions croissantes étant croissante et $\sqrt{a_{n+1}}$ étant positif, on en déduit directement que $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc que la suite est croissante.
2. Si $a_n = 1$, on a simplement $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. La fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Surtout, en posant $g(x) = f(x) - x$, la fonction g est dérivable et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 = \dfrac{1 - 2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}} < 0$. La fonction g est donc décroissante, et comme $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, elle s'annule exactement une fois sur $[0, +\infty[$. En fait, on peut calculer explicitement la valeur d'annulation en résolvant l'équation $\sqrt{1+x} = x \Rightarrow 1 + x = x^2$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et s'annule en $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (on ne garde que la valeur positive). On peut résumer les informations obtenues dans le tableau suivant :

x	0		x_1		$+\infty$
f_1	1	$\nearrow$	x_1	$\nearrow$	$+\infty$
$f_1(x) - x$		$+$	0	$-$	

   L'intervalle $[0, x_1[$ étant stable par la fonction f_1, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle (récurrence triviale, sachant que $u_0 = 1$). La suite est donc majorée par x_1 et croissante, donc convergente. Sa limite est un point fixe de f_1 qui n'en a qu'un seul, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. Regardons ce qui se passe pour les premiers termes de la suite : $a_0 = 3^2$ donc $u_0 = \sqrt{a_0} = 3$; $a_1 = 3^4 = 81$, donc $u_1 = \sqrt{9 + \sqrt{81}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $a_2 = 3^8$, donc $u_2 = \sqrt{9 + \sqrt{81 + 81}} = \sqrt{9 + 9\sqrt{2}} = 3\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Si on n'est pas complètement endormi, on constate que les valeurs obtenues sont exactement triples de celles correspondant à la suite (u_n) de la question

précédente (avec une suite constante égale à 1, on a bien $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{1+u_1} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ etc). Si on note plutôt v_n les termes de la suite correspondant à la suite (a_n) constante égale à 1, on prouve par récurrence que $u_n = 3v_n$ pour tout entier n. On vient de constater que c'était vrai pour les premières valeurs de n, et si on le suppose vrai pour un certain entier n, alors $u_{n+1} = f_{a_1} \circ f_{a_2} \circ \cdots \circ f_{a_n}(\sqrt{a_{n+1}}) = f_{a_1} \circ f_{a_2} \circ \cdots \circ f_{a_n}(3^{2^n}) = 3f_{a_1} \circ \cdots \circ f_{a_n}(1) = 3v_{n+1}$ (on a un empilement de $n-1$ racines carrées qui transforment le 3^{2^n} en simple facteur 3). On en déduit évidemment que notre nouvelle suite (u_n) converge vers $3x_1 = \dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$.

4. C'est évident en exploitant l'écriture sous forme de composées de fonctions croissantes donnée à la première question (et le fait que, si $a_n \leqslant b_n$, $f_{a_n}(x) \leqslant f_{b_n}(x)$ pour tout réel positif x). Même pas vraiment de récurrence. Si $a_n = n$, on a $a_n \leqslant 3^{2^{n+1}}$ pour tout entier naturel n (l'inégalité est tellement large que je me refuse à en faire une démonstration rigoureuse). La suite correspondant à $a_n = n$ sera donc croissante et majorée par la limite obtenue à la question précédente, elle converge donc. Pour $a_n = n!$ et $a_n = n^n$, c'est en fait exactement pareil. Il faudrait évidemment démontrer rigoureusement qu'on a toujours $3^{2^{n+1}} > n^n$ (lui-même est plus grand que $n!$), ce qui sera au moins vrai à partir d'un certain rang (par exemple en appliquant une croissante comparée à $\ln(3^{2^{n+1}}) = 2^{n+1}\ln(3)$, et à $\ln(n^n) = n\ln(n)$). C'est suffisant pour conclure exactement de la même façon.

5. L'inégalité demandée est en fait évidente : $\sqrt{a_n} \geqslant a_n^{\frac{1}{2}}$ (c'est même une égalité dans ce cas, bien entendu), puis $\sqrt{a_{n-1}+a_n} \geqslant \sqrt{0+\sqrt{a_n}} \geqslant a_n^{\frac{1}{4}}$, et ainsi de suite. En fait, par croissance des fonctions f_a, on a $u_n \geqslant f_0 \circ f_0 \circ \cdots \circ f_0(a_n) = \sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{a_n}}} = a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}}$. Il suffit donc de choisir par exemple une suite (a_n) pour laquelle on a $a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}} = n$ pour obtenir une suite (u_n) qui va diverger vers $+\infty$. C'est toujours possible, en posant $a_n = n^{2^{n+1}}$ (ce qui donne des valeurs particulièrement énormes !).