Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 7

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 4 février 2026

Exercice 1

Calculer d'au moins deux façons différentes (même trois si vous êtes courageux) les puissances (positives) de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La formule obtenue reste-t-elle valable pour $n = -1$? Pour $n = -2$? Permet-elle de calculer une « racine carrée » de la matrice A lorsque $n = \dfrac{1}{2}$?

Exercice 2

1. Montrer que l'équation $x \ln(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $]1, +\infty[$, qu'on notera α par la suite.
2. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\ln(x)}$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$, et montrer en particulier qu'elle admet en α un minimum dont on notera la valeur β (sans chercher à la calculer).
3. Montrer que, $\forall x \geqslant \beta$, il existe un unique réel dans l'intervalle $]1, \alpha]$, qu'on notera $g(x)$, vérifiant $e^{g(x)} = x \ln(g(x))$. Montrer de même qu'il existe un unique $h(x) \in [\alpha, +\infty[$ vérifiant la même équation.
4. Dresser le tableau de variation des fonctions g et h.

Exercice 3

Soit (a_n) une suite de réels positifs. On associe à cette suite une deuxième suite (u_n) en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}$

1. Montrer que la suite (u_n) est toujours une suite croissante.
2. Dans le cas où la suite (a_n) est constante égale à 1, montrer que (u_n) converge, et calculer sa limite.
3. Dans le cas où la suite (a_n) est définie par $a_n = 3^{2^{n+1}}$, montrer que (u_n) converge, et calculer sa limite.
4. Si (b_n) est une suite de réels positifs vérifiant $a_n \leqslant b_n$ (pour tout entier n), et (v_n) la suite définie à partir de (b_n) sur le même modèle que (u_n) à partir de (a_n), montrer que $u_n \leqslant v_n$. La suite (u_n) converge-t-elle lorsque $a_n = n$? Lorsque $a_n = n!$? Lorsque $a_n = n^n$?
5. Montrer qu'on peut créer une suite (a_n) pour laquelle (u_n) ne converge pas. On pourra commencer par montrer que $u_n \geqslant a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}}$.