

Devoir Maison n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 4 novembre 2025

Problème

Le but de ce problème est de proposer une construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{R}$ et de démontrer quelques propriétés des nombres réels ainsi obtenus. On suppose dans ce problème que les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont déjà construits et munis de leur ordre naturel, avec les propriétés usuelles de cet ordre. En particulier, on pourra utiliser si besoin le résultat suivant : tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. On pourra aussi utiliser la caractérisation de la borne supérieure suivante, qui est une adaptation de celle vue en cours : si R est une relation d'ordre totale sur un ensemble E , et $A \subset E$, alors M est la borne supérieure de l'ensemble A si et seulement si M majore A et si $\forall x \in E, xRM \Rightarrow \exists a \in A, xRa$ et aRM . Il est par contre hors de question d'utiliser le moindre résultat faisant intervenir les nombres réels « usuels » puisqu'ils sont censés ne pas encore exister au début de ce problème.

On définit justement une **section** de l'ensemble $\mathbb{Q}$ comme un sous-ensemble $S \subset \mathbb{Q}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $S \neq \emptyset$ et $S \neq \mathbb{Q}$
- S n'a pas de maximum : $\forall x \in S, \exists y \in S, x < y$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2$, si $y \leq x$ et $x \in S$, alors $y \in S$ (autrement dit, S contient tous les éléments inférieurs à chacun de ses éléments)

Par **définition**, un nombre réel est une section de $\mathbb{Q}$, et on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels (un nombre réel est donc, aussi bizarre que ça puisse vous sembler, un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$).

I. Propriétés générales de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $x \in \mathbb{Q}$, l'ensemble $S_x = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\}$ est une section de $\mathbb{Q}$.
2. Soit S une section de $\mathbb{Q}$. Montrer que tout rationnel n'appartenant pas à S est un majorant strict de S . Montrer par ailleurs que, $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+*}$, $\exists x \in S, \exists y \notin S, y - x < \varepsilon$.
3. Si S et S' sont deux sections de $\mathbb{Q}$, montrer que $S \subset S'$ ou $S' \subset S$.
4. Montrer que, si $S_1, S_2, \dots, S_n$ sont des sections de $\mathbb{Q}$, alors $S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n$ est aussi une section de $\mathbb{Q}$. Cette propriété reste-elle vraie pour une union infinie ?
5. Montrer que l'application $i : x \mapsto S_x$ est une fonction injective et strictement croissante. Cette constatation permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ en considérant que $S_x = x$ lorsque $x \in \mathbb{Q}$.
6. On définit une relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ en posant $S \leq S' \Leftrightarrow S \subset S'$ (on rappelle si besoin que les réels sont par définition des sections de $\mathbb{Q}$). Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$ prolongeant l'ordre naturel sur $\mathbb{Q}$ (autrement dit, si x, y sont deux rationnels vérifiant $x \leq y$, alors avec les notations des questions précédentes $i(x) \leq i(y)$).
7. Montrer qu'un sous-ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ qui est majoré admet une borne supérieure M , et que $M = \bigcup_{S \in A} S$.

8. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2$, si $S < S'$, alors $\exists z \in \mathbb{Q}$, $S < i(z) < S'$.
9. Montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien : $\forall S \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $S \leq i(n)$.

II. Construction des opérations usuelles sur $\mathbb{R}$.

On souhaite désormais définir les opérations sur nos nombres réels, toujours définis comme des sections de $\mathbb{Q}$. On définit pour cela les objets suivants :

- la **somme** des sections S et S' est l'ensemble $S + S' = \{x + y \mid x \in S, y \in S'\}$.
 - l'**opposé** d'une section S est définie par $-S = \{x \in \mathbb{Q} \mid -x \notin S\}$ (on admettra que, si S est en fait un nombre rationnel, autrement dit si $S = i(x)$, avec $x \in \mathbb{Q}$, alors $-S = i(-x)$).
 - on note 0 la section $i(0) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.
 - la **valeur absolue** d'une section S est égale à S si $0 \leq S$ (au sens défini dans la première partie), et à $-S$ si $S \leq 0$.
 - on note enfin $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des sections vérifiant $0 < S$ et $\mathbb{R}^{-*}$ l'ensemble des sections vérifiant $S < 0$.
1. Expliquer pourquoi, si $x \in \mathbb{Q}$, $-i(r) = i(-r)$.
 2. Vérifier que $-0 = 0$ et que, pour une section S n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$, $x \notin S \Leftrightarrow -x \in (-S)$.
 3. Montrer que $S \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \exists x \in S, x > 0$.
 4. Montrer que l'addition définie ci-dessus est une loi de composition interne commutative sur l'ensemble $\mathbb{R}$, ce qui signifie deux choses : $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2$, $S + S' \in \mathbb{R}$, et $S + S' = S' + S$.
 5. Montrer que l'addition définie sur $\mathbb{R}$ est un prolongement de l'addition naturelle sur $\mathbb{Q}$: $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2$, $i(x) + i(y) = i(x + y)$.
 6. Montrer que l'addition définie sur $\mathbb{R}$ est commutative, et que 0 en est un élément neutre : $\forall S \in \mathbb{R}$, $0 + S = S + 0 = S$.
 7. Montrer que l'opposé d'un réel (donc d'une section) est un réel, et que $S + (-S) = 0$.
 8. Montrer que, $\forall S \in \mathbb{R}$, $-(-S) = S$.
 9. En déduire que, $\forall S \in \mathbb{R}$, $|-S| = |S|$.
 10. Si S et S' sont deux réels appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$, on définit le **produit** de S et de S' par $SS' = \bigcup_{0 < x \in S, 0 < y \in S'} i(xy)$. On peut étendre cette définition à d'autres réels que ceux qui sont strictement positifs, mais on s'en dispensera pour ce devoir.
Montrer que ce produit est une loi de composition interne commutative sur $\mathbb{R}$.
 11. Montrer que, $\forall (S, S') \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $SS' \in \mathbb{R}^{+*}$.
 12. Montrer que le produit de réels prolonge le produit des nombres rationnels (même principe que pour l'addition plus haut : $i(xy) = i(x)i(y)$ si x et y sont rationnels).
 13. Montrer que $i(1)$ est élément neutre pour le produit de réels.
 14. On définit enfin l'**inverse** d'une section $S \in \mathbb{R}^{+*}$ par $S^{-1} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}, x > 0, S < i(x)} i\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que, si $S \in \mathbb{R}^{+*}$, alors $S^{-1} \in \mathbb{R}^{+*}$.
 15. Montrer que, si $S \in \mathbb{R}^{+*}$, $SS^{-1} = i(1)$ (ce qui revient à dire que S^{-1} est bien l'inverse de S).