

Devoir Maison n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

8 septembre 2025

Exercice 1

1. La première chose à faire est de préciser un domaine de résolution : les trois logarithmes sont définis seulement si $x + 3 > 0$, $2x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, ce qui sera le cas si $x > \frac{1}{2}$.
On résout donc sur $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$, où notre inéquation est équivalente à $\ln((x + 3)(2x - 1)) \leq \ln(x + 1)$ soit en passant à l'exponentielle et en développant $2x^2 + 5x - 3 \leq x + 1$, ou encore $2(x^2 + 2x - 2) \leq 0$. Le trinôme constituant le membre de gauche (après division par 2) a pour discriminant $\Delta = 4 + 8 = 12$, et admet pour racines $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2} = -1 - \sqrt{3}$, et $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2} = -1 + \sqrt{3}$. Le trinôme étant négatif entre ses racines, et comme $x_1 < \frac{1}{2} < x_2$, on conclut que $\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2}, \sqrt{3} - 1 \right]$.
2. L'équation est équivalente à $\sin^2(2x) = \frac{1}{2}$, donc $\sin(2x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. On peut regrouper tous les cas sous une unique formule : $2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, donc $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Si on maîtrise cette notation, on peut utiliser une congruence : $x \equiv \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{4} \right]$. Remarquons que pour résoudre cette équation, connaître la formule de duplication du sinus ne sert strictement à rien (ça complique même fortement les choses d'essayer de l'utiliser).
3. Inutile de préciser un domaine de résolution ici, il apparaîtra naturellement au cours des calculs. La première chose à faire absolument est de passer le 2 du membre de droite à gauche pour obtenir $\frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x + 2} < 0$. Il ne reste plus qu'à faire un bête tableau de signes. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $x_1 = \frac{-4 - 2}{-2} = 3$ et $x_2 = \frac{-4 + 2}{-2} = 1$ (racine évidente en fait), le dénominateur a pour racines vraiment évidentes 1 et 2. Comme 1 est racine des deux trinômes, on peut être tenté de simplifier la fraction, mais attention, 1 ne peut absolument pas être solution de l'inéquation (qui n'est pas définie en 1 sous sa forme initiale). Allons-y pour le tableau de signes (en notant Q le quotient) :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$-x^2+4x-3$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	
Q	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$	0	$-$

Il ne reste plus qu'à conclure : $\mathcal{S} =] -\infty, 1[\cup] 1, 2[\cup] 3, +\infty[$.

4. On constate que 1 est racine évidente de l'équation : $1 - 2 + 3 - 2 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche sous la forme $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$. Par identification des coefficients, on a les conditions $a = 1$,

$b - a = -2$ donc $b = -1$, $c - b = 3$ donc $c = 2$, ce qui est confirmé par la dernière équation. Reste à trouver les racines du trinôme $x^2 - x + 2$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 8 = -7$ et n'admet donc aucune racine réelle. Finalement, $\mathcal{S} = \{1\}$.

5. Deux réels ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés. On va donc résoudre séparément deux équations. Commençons par le cas d'égalité $x^2 + x + 2 = 2x^2 - 3x + 1$, qui donne $x^2 - 4x - 1 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 16 + 4 = 20$, qui a pour racines réelles $x_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{5}$. Passons au cas où les deux membres sont opposés : $x^2 + x + 2 = -2x^2 + 3x - 1$ donne $3x^2 - 2x + 3$, qui a un discriminant largement négatif, et donc pas de solution réelle. Finalement, $\mathcal{S} = \{2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\}$.

Exercice 2

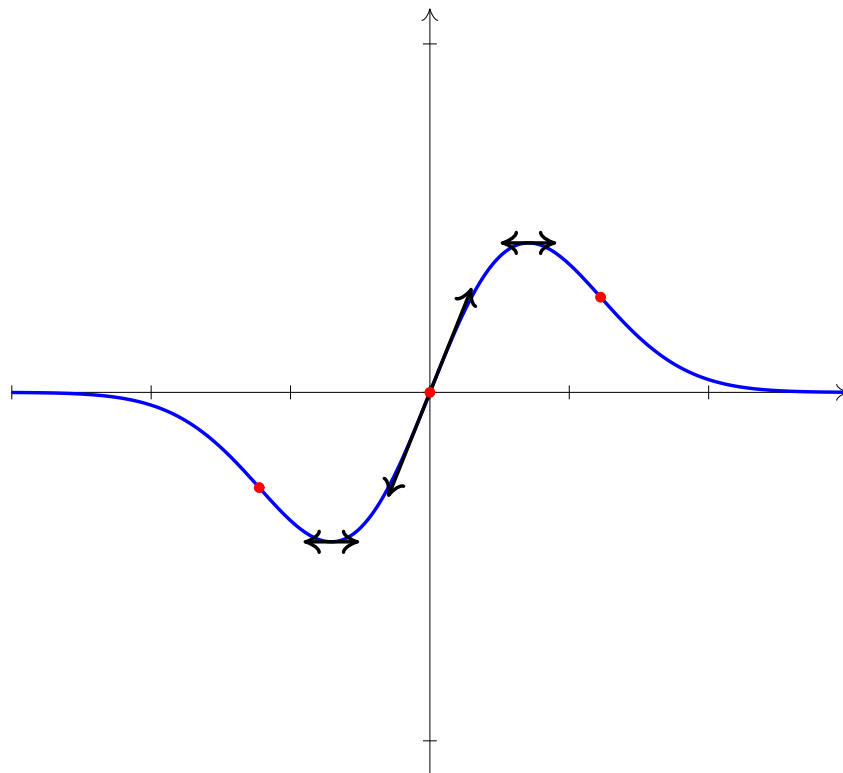
La fonction f est clairement définie et dérivable (deux fois) sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est impaire, ce qui permet de limiter l'étude à l'intervalle $[0, +\infty[$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (si on veut vraiment être hyper rigoureux, on pose $X = \sqrt{x}$ pour sa ramener à la croissance comparée classique $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{X}}{e^X} = 0$). L'axe des abscisses sera donc asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$ (par imparité de f).

Passons aux variations : $f'(x) = e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, elle s'annule lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$, donc pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (on oublie la valeur négative au vu de notre intervalle d'étude). La fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right]$, admettant comme maximum $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}e} \simeq 0.43$. En exploitant l'imparité de la fonction, on peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}e}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}e}$	0

Bien sûr, comme on est motivés, on tente d'étudier la convexité : $f''(x) = -4xe^{-x^2} - 2x(1 - 2x^2)e^{-x^2} = x(4x^2 - 6)e^{-x^2}$. Cette dérivée seconde s'annule donc en 0, mais aussi quand $x^2 = \frac{3}{2}$, donc en $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \simeq 1.22$. La fonction f sera concave sur $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ et sur $\left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, et convexe sur $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right]$. Il y a trois points d'inflexion sur la courbe. Celui en 0 correspond à une tangente d'équation $y = x$ (puisque $f'(0) = 1$). Pour les deux autres, c'est un peu plus pénible de calculer les tangentes correspondantes. On calcule $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2}e}$ (valeur assez peu sympathique), et $f'\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -2e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{e\sqrt{2}e}$. Par imparité de f et parité de f' , on en déduit les valeurs en $-\sqrt{\frac{3}{2}}$. Dans les deux cas, tracer précisément la tangente va se révéler à peu près

impossible, donc je m'en dispense sur la courbe ci-dessous (les points d'inflexion sont simplement indiqués en rouge) :



Exercice 3

Pour les curieux, cet exercice était un (petit) extrait du sujet de maths du bac marocain 2023.

Partie I

- La technique la plus simple pour montrer des inégalités a priori peu évidentes comme celle-ci est de tout passer du même côté et d'étudier le signe de la différence. Ici, on a deux inégalités à démontrer, commençons par celle de gauche : $\frac{1}{1+t} - \frac{4}{(2+t)^2} = \frac{(2+t)^2 - 4(1+t)}{(1+t)(2+t)^2} = \frac{4 + 4t + t^2 - 4 - 4t}{(1+t)(2+t)^2} = \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2} \geq 0$ puisqu'on a supposé $t \geq 0$. Ceci prouve bien l'inégalité de gauche, passons à celle de droite : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{(1+t)^2 + 1 - 2(1+t)}{2(1+t)^2} = \frac{t^2}{2(1+t)^2} \geq 0$. Là aussi, la conclusion est celle attendue.
- Commençons par constater les choses suivantes : la fonction $x \mapsto \frac{2x}{2+x}$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{2(2+x) - 2x}{(2+x)^2} = \frac{4}{(2+x)^2}$. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ a bien sûr pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Enfin, on peut écrire $\frac{1}{2} \times \frac{x^2 + 2x}{1+x} = \frac{1}{2} \times \frac{(x+1)^2 - 1}{x+1} = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2(x+1)}$ pour obtenir rapidement comme expression de sa dérivée $\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+x)^2}$. Ces trois dérivées sont exactement les expressions apparaissant dans l'encadrement de la question 1. On peut donc partir de ce

dernier et intégrer l'encadrement entre 0 et x (les inégalités étant vraies pour toute valeur de t comprise entre 0 et x , on a le droit d'en déduire les mêmes inégalités pour les intégrales) :

$$\int_0^x \frac{4}{(2+t)^2} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+t)^2} dt.$$
Chacune des trois primitives données par l'énoncé s'annulant en 0, on trouve bien l'encadrement souhaité.

3. En exploitant ce qui précède, et en divisant partout par x (qui est supposé strictement positif, donc le sens des inégalités ne va pas changer), on a $\frac{2}{2+x} \leq g(x) \leq \frac{x+2}{2(1+x)}$. On continue à manipuler cet encadrement en soustrayant 1 aux trois membres, puis en divisant une deuxième fois par x , pour trouver $\frac{2}{2+x} - 1 \leq g(x) - 1 \leq \frac{x+2}{2+2x} - 1$, soit $-\frac{x}{2+x} \leq g(x) - 1 \leq -\frac{x}{2+2x}$, puis $-\frac{1}{2+x} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq -\frac{1}{2+2x}$, encadrement valable pour tout $x > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2+2x} = -\frac{1}{2}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$.

Partie II

1. On a déjà $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée (si on veut être hyper rigoureux et ne pas être gêné par le $1+x$ à l'intérieur du $\ln$, on écrit par exemple l'encadrement $0 \leq g(x) \leq \frac{\ln(2x)}{x}$, valable si $x > 1$, et qui suffit à conclure). Le produit par e^{-x} qui a également une limite nulle ne va pas modifier le résultat : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc en $+\infty$ une asymptote horizontale confondue avec l'axe des abscisses.
2. (a) Par hypothèse, $f(0) = 1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (c'est un résultat classique de limite de taux d'accroissement, mais on peut aussi le redémontrer à partir de l'encadrement de la fonction g obtenue en cours de question I.3), donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Ceci prouve bien que f est continue à droite en 0 (la valeur de la fonction coïncide avec la limite).
- (b) Faisons plutôt le calcul à l'envers : $\frac{e^{-x}-1}{x}g(x) + \frac{g(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}g(x)-1}{x} = \frac{f(x)-1}{x}$, ce qui était demandé.
- (c) Puisque $f(0) = 1$, le taux d'accroissement de la fonction f en 0 est défini par $\tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)-1}{x}$. C'est la limite de ce taux d'accroissement à droite de 0 qui nous donnera la valeur de la dérivée demandée. On va bien sûr exploiter la question précédente : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$, ça a été démontré dans la première partie de l'exercice. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (encore une limite de taux d'accroissement classique), donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{-x} = 1$ (c'est la même limite : si x tend vers 0, $-x$ aussi) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$. Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ comme signalé en question II.1. Il ne reste plus qu'à recoller les morceaux : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = -1 \times 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$, ce qui prouve que f est dérivable à droite en 0, et que $f'_d(0) = -\frac{3}{2}$.
3. Toutes les fonctions de l'exercice sont dérivables de façon évidente sur $]0, +\infty[$. Commençons par calculer $g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$. On peut maintenant dériver le produit définissant la fonction f : $f'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = \left(\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) e^{-x} = \frac{(x - (1+x)\ln(1+x) - x(1+x)\ln(1+x))e^{-x}}{x^2(1+x)} = \frac{x - (1+2x+x^2)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$, ce qui corres-

pond bien à la formule de l'énoncé.

4. Repartons de l'encadrement obtenu à la partie I : $\frac{2x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{x^2+2x}{2+2x}$. En multipliant tout par $-(1+x)^2$ qui est toujours négatif (on change donc le sens des inégalités), on a donc $-\frac{1}{2}(1+x)(x^2+2x) \leq -(1+x)^2 \ln(1+x) \leq -\frac{2x(1+x)^2}{2+x}$. On ajoute x à tous les membres de l'encadrement et on développe tout brutalement : $x - \frac{x^3+3x^2+2x}{2} \leq x - (1+x)^2 \ln(1+x) \leq x - \frac{2x^3+4x^2+2x}{2+x}$, soit $\frac{-x^3-3x^2}{2} \leq x - (1+x)^2 \ln(1+x) \leq \frac{-2x^3-3x^2}{2+x}$. Il est temps de tout diviser par $x^2(1+x)$ (qui est positif avec les hypothèses faites sur x pour obtenir le magnifique encadrement suivant : $-\frac{x+3}{2+2x} \leq \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq -\frac{2x+3}{(1+x)(2+x)}$. Sous l'hypothèse $x > 0$, le majorant obtenu est clairement négatif, ce qui prouve que notre quotient est strictement inférieur à 0. Reste à prouver que le membre de gauche est plus grand que $-\frac{3}{2}$, ce qu'on va de nouveau faire en calculant la différence : $-\frac{x+3}{2+2x} + \frac{3}{2} = \frac{-x-3+3+3x}{2+2x} = \frac{2x}{2+2x} > 0$, donc ça marche ! Ouf, une fois qu'on a achevé ce superbe calcul, on conclut évidemment facilement sur le signe de $f'(x)$: comme le facteur e^{-x} est toujours positif, notre dérivée est strictement négative, et f est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
5. Il n'y a en fait pas grand chose de passionnant à mettre dans le tableau, ni sur le tracé de courbe d'ailleurs :

x	0	$+\infty$
f	1	0

