Devoir Maison n$^{\mathrm{o}}$ 1

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 8 septembre 2025

Exercice 1

Résoudre (dans $\mathbb{R}$) les équations et inéquations suivantes (on essaiera bien entendu d'être le plus rigoureux possible au niveau de la rédaction).

1. $\ln(x+3) + \ln(2x-1) \leqslant \ln(x+1)$
2. $2\sin^2(2x) - 1 = 0$
3. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} < 2$
4. $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$
5. $|x^2+x+2| = |2x^2-3x+1|$.

Exercice 2

Effectuer une étude (la plus complète possible) de la fontion $f : x \mapsto xe^{-x^2}$. Tous les calculs effectués devront naturellement apparaître sur la copie. Le minimum syndical pour une telle étude de fonction : limites, variations, convexité si les calculs sont faisables, courbe.

Exercice 3

Ce dernier exercice est tiré d'un sujet de bac récent (si, si, je vous assure). Bon courage, c'est un peu technique.

Partie I

1. Montrer que, quel que soit $t \geqslant 0$, $\dfrac{4}{(2+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$.
2. En déduire l'encadrement suivant, valable pour tout réel positif x : $\dfrac{2x}{2+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^2+2x}{1+x}$.
3. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-1}{x} = -\dfrac{1}{2}$.

Partie II

On introduit désormais la fonction f définie par $f(x) = g(x)e^{-x}$, où g est la fonction définie à la question précédente. La fonction f est donc naturellement définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais on la prolonge à $[0, +\infty[$ en imposant $f(0) = 1$. On notera par ailleurs $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. (a) Montrer que f est continue à droite en 0.
   (b) Vérifier que, si $x > 0$, $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{-x}-1}{x} \times g(x) + \dfrac{g(x)-1}{x}$.
   (c) En déduire que f est dérivable à droite en 0, et préciser la valeur de la dérivée correspondante.
3. Montrer que, si $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{-x}$.
4. Montrer que, si $x > 0$, $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$, et en déduire le signe de $f'(x)$.
5. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f, puis tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}_f$ (on indiquera notamment la demi-tangente en 0 sur le dessin).