

Petites Mines 2008 : corrigé.

MPSI Lycée Camille Jullian

20 mai 2025

Problème 1

Partie A : étude de φ_1 .

1. La dérivation et le produit d'un polynôme par un polynôme fixe étant des applications linéaires, les applications $P \mapsto (X - a)(X - b)P'$ et $P \mapsto \left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$ sont linéaires, et φ_1 également en tant que somme d'applications linéaires. En anticipant les questions suivantes, on va montrer que φ_1 est un endomorphisme en calculant explicitement l'image par l'application d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_1[X]$. Si $P = \alpha X + \beta$, on a $P' = \alpha$, donc $\varphi_1(P) = \alpha(X - a)(X - b) - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(\alpha X + \beta) = \alpha X^2 - \alpha(a+b)X + \alpha ab - \alpha X^2 - \beta X + \frac{\alpha a + \alpha b}{2}X + \frac{\beta a + \beta b}{2} \in \mathbb{R}_1[X]$ puisque les termes en X^2 se simplifient (pas besoin non plus de simplifier l'écriture pour le moment). L'application φ_1 est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. En reprenant les calculs de la question précédente, $\varphi_1(1) = -X + \frac{a+b}{2}$, et $\varphi_1(X) = -(a+b)X + ab + \frac{a+b}{2}X = -\frac{a+b}{2}X + ab$. On en déduit la matrice demandée : $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$.
3. L'application est bijective si et seulement si le déterminant de la matrice M_1 est non nul, donc si $-\frac{(a+b)^2}{4} + ab \neq 0$ ou encore $(a+b)^2 \neq 4ab$. en passant tout du même côté et en développant, on trouve $a^2 - 2ab + b^2 \neq 0$, soit $(a-b)^2 \neq 0$, ce qui est vérifié si $a \neq b$. Il n'y a donc que lorsque $a = b$ que l'application n'est pas bijective.
4. (a) Il s'agit d'une famille de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2. Les vecteurs sont non proportionnels quand $a \neq b$, ils forment donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
(b) Calculons : $\varphi_1(X-a) = (X-a)(X-b) - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(X-a) = (X-a)\left(X-b - X + \frac{a+b}{2}\right) = \frac{a-b}{2}(X-a)$. De même, on obtient $\varphi_2(X-b) = (X-a)(X-b) - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(X-b) = \frac{b-a}{2}(X-b)$. Les deux polynômes sont donc des vecteurs propres de l'application φ_1 , associés à des valeurs propres opposées. On peut alors écrire simplement $M = \frac{a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(c) Pour la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$, il suffit d'écrire (en colonnes comme d'habitude) les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique : $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour

déterminant $b-a$, donc son inverse, qui correspond à la matrice de passage en sens inverse, est $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}$.

(d) Question de cours : $M = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} M_1 P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}$, ou dans l'autre sens $M_1 = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$.

(e) La matrice M étant diagonale, on a simplement $M^p = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix}$. Or,

une récurrence triviale permet de prouver que $M_1^p = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M^p P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$ (les notations de l'énoncé sont suffisamment pénibles pour que je n'aie pas envie de l'écrire explicitement, mais c'est exactement la même récurrence que d'habitude dans ce genre de cas), donc

$$\begin{aligned} M_1^p &= -\frac{(a-b)^{p-1}}{2^p} \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\ &= \frac{(a-b)^{p-1}}{2^p} \begin{pmatrix} a & (-1)^p b \\ -1 & (-1)^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\ &= \frac{(a-b)^{p-1}}{2^p} \begin{pmatrix} a + (-1)^{p-1} b & ab(1 - (-1)^p) \\ (-1)^p - 1 & (-1)^p a - b \end{pmatrix}. \text{ Vraiment passionnant.} \end{aligned}$$

5. (a) Par définition, $\Gamma = \text{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3)$, donc Γ est bien un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) En prenant la formule explicite de M_1^p calculée plus haut (autant qu'elle serve à quelque chose), on a $M_1^2 = \frac{a-b}{4} \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \frac{(a-b)^2}{4} I_2$, qui est effectivement un cas très particulier de combinaison linéaire de I_2 et de M_1 . On en déduit immédiatement $M_1^3 = \frac{(a-b)^2}{4} M_1$, ce qui permet de conclure.

(c) Les matrices I_2 et M_1 forment donc une famille génératrice de Γ . Comme les deux matrices ne sont pas proportionnelles (la matrice M_1 n'étant même pas diagonale), elles forment aussi une famille libre, donc une base de Γ .

6. Si $a = 4$ et $b = 2$, on a $\frac{(a-b)^2}{4} = 1$, donc $M_1^2 = I_2$, ce qui suffit à prouver que $\varphi_1^2 = id$, et donc que φ_1 est une symétrie. De plus, on sait déjà que la matrice de φ_1 sera diagonale dans la base $\mathcal{B} = (X-4, X-2)$, avec des coefficients diagonaux égaux à 1 et -1 . Le polynôme X_4 est donc invariant par φ_1 , et le polynôme $X-2$ vérifie $\varphi_1(X-2) = -(X-2)$, ce qui suffit à affirmer que φ_1 est la symétrie par rapport à $\text{Vect}(X-4)$ parallèlement à $\text{Vect}(X-2)$.

Partie B : Quelques généralités sur φ_n .

7. La linéarité de φ_n se démontre exactement de la même façon que celle de φ_1 évoquée en tout début d'énoncé (ce n'est pas le facteur n en plus qui va perturber la linéarité). Reste à prouver que, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , alors $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme dérivé P' étant de degré (au plus) $n-1$, le produit $(X-a)(X-b)P'$ a un degré majoré par $n+1$, ce qui est aussi le cas du terme $n \left(X - \frac{a+b}{2} \right) P$. Il suffit donc de prouver que le terme de degré $n+1$ de leur différence est nul. Notons pour cela a_n le coefficient de degré n du polynôme P_n , alors le polynôme P' a un coefficient de degré $n-1$ égal à na_n , et c'est également la valeur du coefficient de degré $n+1$ de $(X-a)(X-b)P'$ (je ne parle volontairement pas de coefficient dominant car a_n a tout à fait le droit d'être nul). Or, le coefficient de degré $n+1$ de $n \left(X - \frac{a+b}{2} \right) P$ est clairement lui aussi égal à na_n , ce qui prouve que $\varphi_n(P)$ a un coefficient de degré $n+1$ qui est nul, et donc que φ_n est bien un

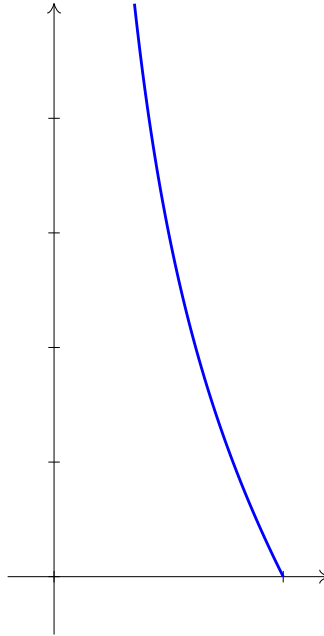
endomorphisme (on pouvait aussi faire un calcul beaucoup plus bourrin de l'image complète de P).

8. (a) Le dénominateur de f se factorise sous la forme $(x-a)(x-b)$ (ça doit être évident si on connaît ses relations coefficients-racines), donc ne s'annule pas sur l'intervalle $] \alpha, +\infty[$ qui par définition de α ne contient ni a ni b . La fonction f est donc définie (et trivialement continue par théorèmes généraux) sur cet intervalle.
- (b) On reconnaît bien sûr une forme $\frac{u'}{u}$, et comme le dénominateur u est positif sur l'intervalle $] \alpha, +\infty[$ (on est à l'extérieur des racines), on peut prendre $F : x \mapsto \ln(x^2 - (a+b)x + ab)$.
- (c) C'est une équation linéaire homogène du premier ordre, qu'on peut écrire sous la forme $y' - \frac{n}{2}f(x)y = 0$. La fonction $\frac{n}{2}f$ admettant pour primitive $\frac{n}{2}F$, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto K e^{\frac{n}{2}F(x)} = K(x^2 - (a+b)x + ab)^{\frac{n}{2}}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
- (d) L'intervalle I étant un ensemble infini, un polynôme est nul si et seulement si il s'annule sur I tout entier. En particulier, $P \in \ker(\varphi_{2p}) \Leftrightarrow \forall x \in I, P'(x) - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{x^2 - (a+b)x + ab} = 0$.
Autrement dit, P doit être une solution de l'équation (E) , donc $P(x) = K(x^2 - (a+b)x + ab)^p$. On a bien des fonctions polynômiales (de degré n qui plus est), ce qui permet de conclure que $\ker(\varphi_{2p}) = \text{Vect}((X^2 - (a+b)X + ab)^p)$.
- (e) Ici, le problème est qu'a priori les solutions de (E) ne sont pas des fonctions polynômiales. A priori seulement, car si $a = b$, on a en fait $(x^2 - (a+b)x + ab)^{\frac{2p+1}{2}} = (x^2 - 2ax + a^2)^{\frac{n}{2}} = (x-a)^n$, donc on retrouve simplement dans ce cas $\ker(\varphi_{2p+1}) = \text{Vect}((X-a)^{2p+1})$. Par contre, si $a \neq b$, l'équation n'admet aucune solution polynômiale, ce qui prouve que $\ker(\varphi_{2p+1}) = \{0\}$. On retrouve en fait ici le fait que l'application est bijective lorsque $a \neq b$, ce qui était déjà le cas lorsque $n = 1$ (donc pour $p = 0$).

Partie C : Intersection de courbes dans le cas où $n = 2$.

9. On a donc désormais $\varphi_2(P) = (X-a)^2P' - 2(X-a)P$. On calcule donc facilement $\varphi_2(1) = -2(X-a) = 2a - 2X$, $\varphi_2(X) = (X-a)^2 - 2X(X-a) = -(X+a)(X-a) = a^2 - X^2$, et enfin $\varphi_2(X^2) = 2X(X-a)^2 - 2X^2(X-a) = 2X(X-a) \times (-a) = -2aX^2 + 2a^2X$.
10. (a) On cherche donc à résoudre l'équation $2a - 2x = -2ax^2 + 2a^2x$, soit $ax^2 - (1+a^2)x + a = 0$. Si on n'est pas observant, on calcule le discriminant $\Delta = (1+a^2)^2 - 4a^2 = 1 + 2a^2 + a^4 - 4a^2 = 1 - 2a^2 + a^4 = (a^2 - 1)^2$, et on en déduit la présence de deux racines $x_1 = \frac{1+a^2+a^2-1}{2a} = a$ et $x_2 = \frac{1+a^2-a^2+1}{2a} = \frac{1}{a}$ (on pouvait constater directement que a était racine évidente). Ces deux racines sont distinctes puisqu'on a supposé $a > 1$, et $f(a) = 2a - 2a = 0$, et $f\left(\frac{1}{a}\right) = 2a - \frac{2}{a}$, ce qui donne bien les coordonnées annoncées pour les points d'intersection.
- (b) En notant (x_a, y_a) les coordonnées du point B_a , on constate aisément que $y_a = -2x_a + \frac{2}{x_a}$.
Tous les points appartiennent donc à la courbe d'équation $y = -2x + \frac{2}{x}$. Notons pour être précis qu'ils appartiennent même à la portion de cette courbe dont les abscisses appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$ puisque l'hypothèse $a > 1$ implique $x_a = \frac{1}{a} \in]0, 1[$.
- (c) On arrive à **LA** question du sujet que vous ne pouviez pas traiter. Il s'agit en l'occurrence d'une hyperbole, ce qu'on pourrait constater simplement en traçant la courbe de la fonction $x \mapsto -2x + \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

- (d) Puisqu'on ne veut tracer que sur $]0, 1[$, on pose $h(x) = -2x + \frac{2}{x}$, on dérive pour obtenir $h'(x) = -2 - \frac{2}{x^2} < 0$, et on calcule brillamment $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$ et $h(1) = 0$, ce qui donne l'allure de courbe suivante :

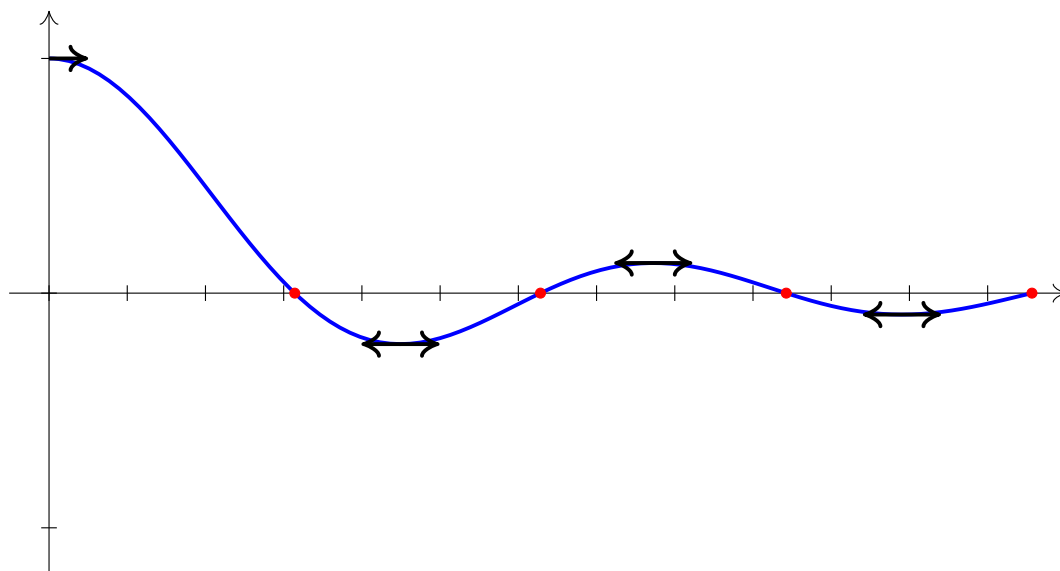


Problème 2

Partie A : Études de deux fonctions.

1. (a) Leur dénominateur ne s'annulant qu'en 0, les fonctions F et G sont trivialement continues sur $]0, +\infty[$.
- (b) En exploitant les DL classiques des fonctions trigonométriques, on a $F(x) = \frac{x + o(x^2)}{x} = 1 + o(x)$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$, et $G(x) = \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x} \sim \frac{x}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0$. Les deux fonctions sont donc prolongeables, en posant $F(0) = 1$ et $G(0) = 0$.
2. (a) La dérivabilité est triviale par théorèmes généraux. De plus, $F'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$ et $G'(x) = \frac{x(1 + \sin(x)) - 1 + \cos(x)}{x^2}$ (rien de sympathique à simplifier là-dedans).
- (b) Les calculs effectués plus haut montrent que les deux fonctions admettent un DL à l'ordre 1 en 0, donc qu'elles y sont dérivables (une fois prolongées par continuité). Plus précisément, puisque $F(x) = 1 + o(x)$, on aura $F'(0) = 0$, et puisque $G(x) = \frac{x}{2} + o(x)$, on aura $G'(0) = \frac{1}{2}$.
3. (a) Les réels a_k sont les valeurs d'annulation du sinus, donc $a_k = k\pi$ (qui est bien une suite strictement croissante si on fait l'effort particulièrement épuisant de les prendre dans l'ordre!).
- (b) Encore une question débile, on doit cette fois-ci résoudre $\cos(x) = 1$, donc $b_k = 2k\pi$, et $b_k = a_{2k}$ (donc (b_k) est une sous-suite de (a_k) , si on veut vraiment essayer de dire quelque chose de vaguement intelligent).

4. (a) C'est une application directe du théorème de Rolle : f prend la même valeur en a_k et en a_{k+1} , elle est dérivable sur l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, donc f' s'annule sur cet intervalle ouvert.
- (b) Oui, c'est vrai (devant une question aussi triviale, on est obligés de s'incliner, on n'arrive plus à justifier quoi que ce soit).
- (c) On dérive : $h'(x) = \cos(x) - x \sin(x) - \cos(x) = -x \sin(x)$ qui est de signe constant sur $]a_k, a_{k+1}[$ puisque le sinus y est de signe constant (et ne s'annule pas), ce qui prouve la stricte monotonie de h sur l'intervalle (elle est strictement croissante si k est impair et strictement décroissante si k est pair, si on veut être précis).
- (d) La fonction h est strictement monotone donc injective sur $]a, a_{k+1}[$, elle ne peut donc pas s'y annuler plus d'une fois (et donc F' non plus).
- (e) On calcule $h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ (le cosinus s'annule), qui vaut 1 lorsque k est impair et -1 lorsque k est pair. Dans le cas où k est pair, la fonction h est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ et prend une valeur négative au milieu de l'intervalle, elle ne peut donc pas s'annuler entre $a_k + \frac{\pi}{2}$ et a_{k+1} . Puisqu'on sait qu'elle s'annule exactement une fois sur $]a_k, a_{k+1}[$, on a donc nécessairement $x_k \in \left]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}\right[$. Le raisonnement est identique pour k impair, avec une fonction strictement croissante et une valeur positive en milieu d'intervalle.
- (f) On sait que $x_k > a_k = k\pi$, ce qui suffit évidemment à affirmer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$. De plus, $k\pi < x_k < k\pi + \frac{\pi}{2}$, donc $1 < \frac{x_k}{k\pi} < 1 + \frac{1}{2k}$. Un petit coup de théorème des gendarmes et on conclut : $x_k \sim k\pi$.
5. On connaît les valeurs d'annulation et la position approximative des extrêma de la courbe (abscisse x_k). Il manque le fait que les ordonnées de ces extrêma sont décroissantes (en valeur absolue) pour faire une courbe raisonnable. Sans même le prouver rigoureusement, on doit savoir que $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ va donner une courbe sinusoïdale amortie ressemblant à ceci :



Partie B : Deux fonctions définies par des intégrales.

6. Les fonctions à intégrer étant continues sur le segment d'intégration, c'est trivial.
7. La parité du cosinus et l'imparité du sinus ont pour conséquence immédiate la parité de f et l'imparité de g (ici, c'est x qu'on fait changer de signe pour étudier la parité, il n'y a donc aucune difficulté).
8. (a) Par « linéarité complexe » (les propriétés sont les mêmes que celles des intégrales réelles), on peut écrire $I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t) \cos(xt) + if(t) \sin(xt) dt = \int_0^1 f(t)e^{ixt} dt$. On fait alors une IPP en posant $u(t) = f(t)$, donc $u'(t) = f'(t)$ (la fonction f étant supposée de classe $\mathcal{C}^1$, on a le droit), et $v'(t) = e^{ixt}$ qui s'intègre comme n'importe quelle exponentielle en $v(t) = \frac{1}{ix}e^{ixt}$. On obtient alors $I_f(x) + iJ_f(x) = \left[\frac{f(t)e^{ixt}}{ix} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{f'(t)e^{ixt}}{ix} dt = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t)e^{ixt} dt$ (pour les plus étourdis d'entre vous, ne pas oublier que c'est la variable t qu'on remplace par 0 et 1 dans le crochet).
- (b) Ces fonctions sont continues sur un segment, donc bornées (et atteignent leur bornes), c'est le théorème du maximum.
- (c) Par majoration brutale à coups d'inégalités triangulaires, $|I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{|f(1)| + |f(0)|}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \frac{2M + M'}{x}$. On peut donc poser $A = 2M + M'$ pour avoir la majoration souhaitée.
- (d) Un théorème des gendarmes évident donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) + iJ_f(x) = 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x) = 0$ (une fonction complexe a une limite nulle si et seulement ses partie réelle et imaginaire ont une limite nulle).
- (e) La parité des fonctions donne immédiatement des limites nulles également du côté de $-\infty$.
9. (a) Ah, une question de cours sur les formules de transformation somme-produit, quelle bonne idée : $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. Si on veut la redémontrer rapidement, on écrit $\cos(p) - \cos(q) = \frac{1}{2}(e^{ip} + e^{-ip} - e^{iq} - e^{-iq}) = \frac{1}{2}(e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{q-p}{2}}) - e^{-i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{q-p}{2}}))$ et on reconnaît des sinus via les formules d'Euler).
- (b) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est majorée en valeur absolue par 1. En appliquant l'IAF entre 0 et u (peu importe le signe de u puisqu'on va travailler en valeur absolue), on en déduit donc que $|\sin(u) - \sin(0)| \leq |u - 0|$, soit $|\sin(u)| \leq |u|$.
- (c) Un calcul brutal exploitant les questions précédentes et l'inégalité triangulaire (version intégrales) : $|I_f(x) - I_f(y)| = \left| \int_0^1 f(t) \cos(xt) dt - \int_0^1 f(t) \cos(yt) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| |\cos(xt) - \cos(yt)| dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| \left| \sin\left(\frac{(x+y)t}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{(x-y)t}{2}\right) \right| dt$. On majore subtilement le premier sinus par 1, et le deuxième (en exploitant la question b) par $\frac{1}{2}|(x-y)t|$ pour obtenir $|I_f(x) - I_f(y)| \leq |x-y| \int_0^1 t|f(t)| dt$, comme demandé.
- (d) En notant A la constante $\int_0^1 t|f(t)| dt$ (c'est une intégrale sur un segment d'une fonction continue, qui ne dépend pas du tout de x), on a donc $|I_f(x) - I_f(y)| \leq A|x-y|$. La fonction I_f est donc A -Lipschitzienne, et en particulier continue.

10. Il faut effectivement choisir très judicieusement la fonction f . Attention, c'est une fonction compliquée : on va poser $f(x) = 1$. On a alors $I_f(x) = \int_0^1 \cos(xt) \, dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x} \right]_0^1 = \frac{\sin(x)}{x} = F(x)$, et $J_f(x) = \int_0^1 \sin(xt) \, dt = \left[-\frac{\cos(xt)}{x} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos(x)}{x} = G(x)$. Une conclusion à la hauteur de ce problème particulièrement difficile.