

Feuille d'exercices n° 26 : espaces préhilbertiens.

MPSI Lycée Camille Jullian

10 juin 2025

Exercice 1 (* à **)

Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires :

1. $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2) dt$ sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. $(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.
3. $(P, Q) \mapsto P(1)Q(1) + P'(2)Q'(2) + P''(0)Q''(0)$ sur $E = \mathbb{R}_2[X]$.
4. $(P, Q) \mapsto \int_0^{2\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta)) d\theta$ sur $\mathbb{R}[X]$.
5. $((u_n), (v_n)) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$, sur $E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty \right\}$.

Exercice 2 (*)

Orthonormaliser à l'aide de Gram-Schmidt les familles suivantes :

1. $\mathcal{F} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
2. (f, g, h) , où $f(t) = 1$, $g(t) = t$ et $h(t) = |t|$, dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

3. $(1, X, X^2, X^3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $P \cdot Q = \sum_{i=0}^3 P(i)Q(i)$.

Exercice 3 (**)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et on pose $u = (1, 2, 2)$, $v = (-1, 4, 1)$ et $w = (2, 5, 1)$.

1. Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Orthonormaliser la base (u, v, w) en appliquant le procédé de Gram-Schmidt.
3. On note $F = \text{Vect}(u, v)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F (qu'on notera p).
4. Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion s par rapport à E .

Exercice 4 (**)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $P \cdot Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur E .
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

- En déduire la valeur de $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 + at^2 + bt + c)^2 dt$.
- Tracer dans un même repère une allure des courbes représentatives sur $[-1, 1]$ de la fonction cube et de son projeté orthogonal calculé à la question 3. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 5 (***)

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\|$.

Exercice 6 (**)

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Préciser à quelle condition cette inégalité devient une égalité.

Exercice 7 (**)

Montrer les inégalités suivantes :

- $\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{(n+1)2^n}$.
- si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2$. Quand a-t-on égalité ?
- si f est continue strictement positive sur $[0, 1]$, $\left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^3 dt \times \int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt$.
- si f est continue sur $[a, b]$, ne s'annule pas, et vérifie $\int_a^b f(t) dt = 1$, alors $\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b-a)^2$.
Quand a-t-on égalité ?

Exercice 8 (***)

On se place dans l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$). On pose, $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t) dt$. On notera par ailleurs $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$, et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$.

- Vérifier que φ est un produit scalaire sur l'espace E .
- Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
- Donner une expression explicite de la projection orthogonale sur G .
- On note enfin $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.
 - Exhiber une fonction $f_0 \in E_{a,b}$, calculer sa projection orthogonale sur F et montrer que $E_{a,b} = \{f_0 + h \mid h \in F\}$ (quelle structure a-t-on ainsi défini sur l'ensemble $E_{a,b}$?).
 - Déterminer la valeur de $\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t)) dt$.

Exercice 9 (**)

Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire défini par $P \cdot Q = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

- Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur E .
- Calculer $X^i \cdot X^j$ pour tous entiers $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.
- En déduire une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
- Déterminer le projeté orthogonal d'un polynôme quelconque P sur $\mathbb{R}_k[X]$, pour $k < n$.

Exercice 10 (*)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on pose $F = \{(x, y, z, t) \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F , puis de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.

Exercice 11 (*)

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, on note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base orthonormale de F .
2. Calculer la projection orthogonale d'une matrice M sur F .
3. Calculer la distance de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à F .

Exercice 12 (**)

On souhaite calculer $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2 dt$.

1. Calculer m en utilisant la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien.
2. Retrouver la valeur de m par une méthode directe.
3. Calculer de même (avec deux méthodes!) $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$.

Exercice 13 (***)

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs dans un espace euclidien E de dimension n . On appelle matrice de Gram de la famille la matrice $(u_i \cdot u_j)_{1 \leq i, j \leq n}$, et déterminant de Gram son déterminant, noté $G(u_1, \dots, u_n)$.

1. Exprimer la matrice de Gram en fonction de la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale quelconque de E .
2. Montrer que $\ker(M^\top M) = \ker(M)$, en déduire que la matrice de Gram a le même rang que la famille $(u_1, \dots, u_n)$.
3. En déduire que $G(u_1, \dots, u_n) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ n'est pas libre.
4. Montrer que, si $u_n \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1}))^\perp$, alors $G(u_1, \dots, u_n) = G(u_1, \dots, u_{n-1}) \times \|u_n\|^2$.
5. Si F est un sous-espace de E de base $(f_1, \dots, f_k)$, montrer que, pour tout vecteur $u \in E$,

$$d(u, F) = \sqrt{\frac{G(f_1, \dots, f_k, u)}{G(f_1, \dots, f_k)}}.$$

Exercice 14 (***)

Soient $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ des vecteurs distincts d'un espace euclidien de dimension n vérifiant $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, k\}^2, i \neq j \Rightarrow u_i \cdot u_j < 0$. Montrer que $k \leq n + 1$ (autrement dit, on ne peut pas placer plus de $n + 1$ vecteurs en dimension n faisant des angles deux à deux obtus).

Exercice 15 (***)

Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on définit une forme bilinéaire par $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n P(t)Q(t)e^{-t} dt$.

On posera par ailleurs, pour tout entier naturel n , $f_n(x) = x^n e^{-x}$, et $h_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x)$.

1. Calculer h_0, h_1, h_2, h_3 et représenter dans un même repère l'allure des courbes représentatives de ces polynômes sur l'intervalle $[0, 1]$.

- Justifier que h_n est toujours une fonction polynômiale, et calculer explicitement ses coefficients.
- Vérifier que φ définit un produit scalaire sur E .
- Montrer que la famille $(h_0, \dots, h_n)$ est toujours une famille orthogonale.
- Calculer $\|h_n\|$, en déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire φ .
- Calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$ (on précisera le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ lors du calcul).

Exercice 16 (*)

Soit $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ -2 & -6 & c \\ 6 & a & d \end{pmatrix}$. Déterminer des valeurs de a, b, c et d telles que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 17 (**)

Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques des deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$a) \quad A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad b) \quad B = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 (***)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Problème (***)

On s'intéresse dans cet exercice à une famille célèbre de polynômes, les polynômes de Legendre, définis de la façon suivante : pour tout entier naturel n , on pose $P_n = (X^2 - 1)^n$, puis $L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n^{(n)}$ (ce sont les polynômes L_n qui sont appelés polynômes de Legendre). On notera par ailleurs, pour tout polynôme P , $f(P) = ((X^2 - 1)P)'$.

- Calculer explicitement L_0, L_1, L_2 et L_3 .
- Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes L_n , et vérifier que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer la parité des polynômes L_n .
- Montrer que $L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k}$, en déduire la valeur de $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
- Montrer que $P'_{n+1} - 2(n+1)XP_n = 0$, puis que $(X^2 - 1)P'_n - 2nXP_n = 0$.
- En déduire que $L'_{n+1} = XL'_n + (n+1)L_n$, et que $f(L_n) = n(n+1)L_n$. Donner la matrice de $f|_{\mathbb{R}_n[X]}$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.
- On pose désormais, $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.
 - Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
 - Montrer que $\varphi(f(P), Q) = \varphi(P, f(Q))$.
 - Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthogonale pour φ .
 - Montrer que $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.
 - Calculer la distance de X^{n+1} à $\mathbb{R}_n[X]$.