Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 24 : Groupe symétrique et déterminants.

MPSI Lycée Camille Jullian

16 mai 2025

Exercice 1 (**)

Déterminer la signature des permutations suivantes :

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 9 & 7 & 8 & 1 & 5 & 6 & 10 & 4 \end{pmatrix}$
3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$

Exercice 2 (*)

Écrire la permutation $\sigma = (1\ \ 2)(2\ \ 4\ \ 6\ \ 5)(1\ \ 3\ \ 7)(2\ \ 5\ \ 4)(3\ \ 5\ \ 6\ \ 1)(2\ \ 5)(1\ \ 4\ \ 6)$ comme un produit de cycles.

Exercice 3 (**)

Déterminer le plus petit ensemble E possible engendrant $\mathfrak{S}_5$ (c'est-à-dire tel que tout élément de $\mathfrak{S}_5$ soit produit d'éléments de E). Même question pour $\mathfrak{S}_8$. Reprendre l'exercice en imposant que l'ensemble E ne contienne que des transpositions.

Exercice 4 (**)

On rappelle que l'ordre d'un élément x dans un groupe multiplicatif est le plus petit entier k pour lequel $x^k = 1$. L'ordre d'une permutation sera de même défini comme le plus petit entier $k > 0$ tel que $\sigma^k = id$. Calculer cet ordre en fonction de la décomposition de σ en produit de cycles. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre 12 dans $\mathfrak{S}_7$.

Exercice 5 (* à **)

Calculer les déterminants suivants (en essayant d'utiliser des développements suivant les lignes ou les colonnes ou des combinaisons pour faire apparaitre des 0 ; vous pouvez toujours vérifier vos résultats ensuite avec Sarrus) :

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & b \\ b & b & x \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}$

Exercice 6 (**)

On souhaite calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$ (la matrice dont on calcule le déterminant appartenant ici à $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$).

1. Calculer explicitement D_1 et D_2.
2. Déterminer D_{n+1} en fonction de D_n.
3. En déduire la valeur de D_n.

Exercice 7 (*)

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, on note $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

1. Montrer que J est une matrice inversible.
2. Calculer MJ et en déduire $\det(M)$.

Exercice 8 (***)

Calculer le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $m_{i,i} = 0$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, et $m_{i,j} = 1$ si $j \neq i$ (on pourra chercher une relation de récurrence entre ces différents déterminants).

Exercice 9 (**)

On chercher à calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (matrice n lignes n colonnes avec des 2 sur la diagonale, des 1 juste au-dessus et juste en-dessous de la diagonale, et des 0 partout ailleurs).

1. Calculer les déterminants D_2, D_3 et D_4. Quelle valeur logique donner à D_1 ? Et à D_0 ?
2. Effectuer un développement suivant la première colonne du déterminant D_n pour obtenir une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite (D_n).
3. En déduire la valeur de D_n.
4. Généraliser le calcul en remplaçant les 2 sur la diagonale par des $2\cos(\theta)$ (en conservant des 1 là où il y en avait déja).

Exercice 10 (***)

Calculer le déterminant $D_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$.

Exercice 11 (*)

On note $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{array} \right.$. Calculer $\det(\varphi)$ (non, il n'y a pas de gros calcul à faire).

Exercice 12 (***)

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire. On note $C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice C est le polynôme P (la matrice C est appelée matrice compagnon du polynôme P).

Exercice 13 (**)

Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on note $A(x) = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est polynomiale de degré 4 (seul x est variable, y, z et t sont ici des paramètres fixés).
2. Calculer $A(x)^\top A(x)$, à quelle condition la matrice $A(x)$ est-elle inversible ?
3. En déduire la valeur de $\det(A(x))$.
4. Ces résultats restent-ils vrais si $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$?

Exercice 14 (*)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -id_E$.

1. À l'aide du déterminant, montrer que n est nécessairement un entier pair.
2. Donner un exemple d'application f convenable pour $n = 2$.
3. Généraliser en proposant un exemple pour tout entier pair.

Exercice 15 (**)

On définit la suite de Fibonacci (F_n) par les conditions $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Calculer le déterminant de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $m_{i,j} = F_{|i-j|}$.