Programme de colle n$^{\text{o}}$ 29

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 02/06 au 06/06 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 23 : Probabilités.

Rappel : seules les probabilités sur un univers **fini** sont au programme en première année.

- Vocabulaire général : expérience aléatoire, univers Ω des résultats possibles, évènements (évènement certain ou impossible, évènements incompatibles, système complet d'évènements), loi de probabilité sur un univers Ω (application vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\cup A_i) = \sum \mathbb{P}(A_i)$ quand les évènements A_i sont deux à deux incompatibles), espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
- **Propriétés élémentaires** : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (la formule de Poincaré générale n'est pas à savoir formuler, mais doit pouvoir être retrouvée très rapidement pour une union de trois ou quatre évènements), $\sum \mathbb{P}(A_i) = 1$ si les A_i forment un système complet d'évènements.
- Notion d'équiprobabilité et formule $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ dans le cas d'équiprobabilité.
- Probabilités conditionnelles :
  — définition et notation (la notation $\mathbb{P}_A(B)$ a systématiquement été employée dans le cours)
  — théorèmes faisant intervenir les probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
  — quelques exemples faisant intervenir des chaînes de Markov ont été étudiés mais aucune connaissance théorique sur le sujet n'est exigible (ce qui n'interdit bien évidemment pas de poser des exercices de ce type)
  — PAS de variables aléatoires pour l'instant, elles feront l'objet d'un chapitre séparé

Chapitre 24 : Groupe symétrique, déterminants.

- Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$: vocabulaire (transpositions, cycles, support et longueur d'un cycle), décomposition en produit de cycles à supports disjoints (on n'a fait qu'une ébauche de preuve, qui n'est pas au programme, mais les élèves doivent être capables de déterminer la décomposition d'une permutation donnée), et en produit de transpositions.

- Nombre d'inversions d'une transposition, signature, la signature est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ vers $\{-1, 1\}$, groupe alterné $\mathcal{A}_n$.
- Déterminants :
  - rappels sur le déterminant de deux vecteurs du plan et de trois vecteurs de l'espace : définition géométrique (dans le plan), caractérisation de la colinéarité/coplanarité, interprétation comme aire/volume d'un parallélogramme/parallélépipède, formule dans une base orthonormale, propriétés théoriques (multilinéarité, antisymétrie, alternance)
  - applications multi-linéaires, formes n-linéaires sur un espace vectoriel E, formes symétriques, antisymétriques, alternées, **équivalence entre antisymétrie et alternance**, l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un ev de dimension n est un ev de dimension 1
  - déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, noté $\det_{\mathcal{B}}$, caractérisation des bases comme familles de déterminant non nul
  - déterminant d'une matrice carrée : définition, caractérisation de l'inversibilité, propriétés élémentaires $\det(M^\top) = \det(M)$, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$, techniques de calcul (effet des opérations élémentaires sur les lignes/colonnes, développement du déterminant par rapport à une ligne/colonne), mineurs, cofacteurs et comatrice, formule d'inversion $M(\mathrm{Com}(M))^\top = \det(M)I_n$, exemples de calcul de déterminants par récurrence (on a en particulier traité le cas du **déterminant de Vandermonde** en cours, qui peut être posé en question de cours).

Prévisions pour la dernière semaine : tout le programme de l'année, façon oral blanc.