

Programme de colle n° 27

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 12/05 au 16/05 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 21 : Matrices et algèbre linéaire.

- Matrices représentatives d'applications linéaires :
 - matrice d'une famille de vecteurs dans une base, $\mathcal{F}$ est une base si sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est inversible
 - matrice représentative $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des espaces E et F
 - **calcul de l'image d'un vecteur (dont les coordonnées sont représentées sous forme de matrice-colonne) à l'aide de la matrice représentative**
 - matrice représentative d'une combinaison linéaire et d'une composée d'applications linéaires
 - un endomorphisme est bijectif ssi sa matrice est inversible
- Changement de bases :
 - matrice de passage d'une base vers une autre, expression de l'inverse d'une matrice de passage comme matrice de passage « dans l'autre sens »
 - formule $X = PX'$ pour les matrices colonnes de coordonnées d'un vecteur dans deux bases distinctes
 - formules de changement de bases $N = Q^{-1}MP$ et $N = P^{-1}MP$ (pour un endomorphisme), on doit être capable d'expliquer la formule sans faire une démonstration complètement rigoureuse du résultat
 - matrices équivalentes et matrices semblables, ces deux relations sont des relations d'équivalence
 - quelques exemples simples de diagonalisation ont été vus en cours, le vocabulaire (valeur propre, vecteur propre, diagonalisabilité) est normalement connu même s'il n'est pas officiellement au programme en première année (par contre, pas de polynôme caractéristique bien entendu, puisqu'on n'a pas encore vu les déterminants)
- Outils supplémentaires sur les matrices :
 - noyau, image d'une matrice
 - rang d'une matrice, propriétés élémentaires (invariance par passage à la transposée, par opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes), lien entre matrices équivalentes et rang (**toute matrice de rang r est équivalente à une matrice J_r contenant r coefficients égaux à 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs**)

- produit de matrices par blocs
- matrices extraites, le rang d'une matrice M est la taille maximale de ses matrices extraites inversibles
- le déterminant fera l'objet d'un chapitre séparé, il n'a pas du tout été évoqué pour l'instant

Chapitre 22 : Fractions rationnelles.

- Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$: définition, opérations élémentaires sur les fractions rationnelles, représentant irréductible d'une fraction, degré, dérivée d'une fraction, pôles et racines.
- Décomposition en éléments simples : partie entière, théorème de décomposition en éléments simples (deux versions, l'une complexe, l'autre réelle, aucune n'a été démontrée), calcul effectif des décompositions (on peut utiliser les techniques suivantes : pour un pôle simple, produit par $X - a$ puis évaluation pour $X = a$, ou calcul de $\frac{P(a)}{Q'(a)}$; pour un pôle double, calcul de $G(a)$ et $G'(a)$ après avoir posé $G = (X - a)^2 F$; utilisation de l'évaluation en une valeur non polaire ou d'un calcul de limite après avoir multiplié par X ; changement de variable pour se ramener à un pôle nul dans le cas d'un pôle multiple, éventuellement après avoir soustrait la partie polaire correspondant à d'autres pôles ; divisions euclidiennes successives dans le cas d'un dénominateur de la forme $(X^2 + aX + b)^k$ dans $\mathbb{R}(X)$).
- Applications, notamment à des calculs d'intégrales ou de sommes télescopiques.

Prévisions pour la semaine prochaine : probabilités (début).