Interrogation Écrite n° 6

MPSI Lycée Camille Jullian

17 avril 2025

Énoncé :

1. Déterminer (sans chercher à calculer leur somme) la nature des séries suivantes : $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$, $\sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$, $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$

2. Calculer la somme de la série $\sum \frac{n^2-1}{n!}$ (on ne demande pas de justifier sa convergence avant le calcul de la somme).

3. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum \frac{2n-1}{n^3-4n}$ (définie pour $n \geq 3$)

4. Calculer $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^q}{e^{2p}q!}$.

5. On cherche à déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
   (a) Pourquoi cette somme existe-t-elle ?
   (b) Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.
   (c) Montrer rapidement (mais rigoureusement) que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = 0$.
   (d) Conclure. Quelle formule appliquée de façon peu rigoureuse aurait pu permettre de deviner le résultat dès le début ?