Devoir Surveillé n^o 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

10 mai 2025

Exercice 1

1. (a) Ce sont évidemment des formules qu'on connaît par coeur : $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.

   (b) On calcule facilement $w_{n+1} - w_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Comme $\frac{1}{n}$ a une limite nulle quand n tend vers $+\infty$, on peut appliquer les DL rappelés à la question précédente, et $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$ comme demandé.

   (c) Puisque $-\frac{1}{2n^2} < 0$, le terme général $w_{n+1} - w_n$ sera négatif à partir d'un certain rang, et comme $-\frac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, le critère de comparaison par équivalents des séries de terme général de signe constant permet d'affirmer que la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge. Cette série étant une série télescopique, sa convergence est équivalente à celle de la suite (w_n).

   (d) Puisque la suite (w_n) converge vers le réel γ, on peut écrire $w_n = \gamma + o(1)$, soit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$. En particulier, on a redémontré le résultat (moins fort) vu en cours : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

2. C'est une question qui était présente dans votre récente interrogation écrite sur les séries. Je recopie donc mon corrigé : posons $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$, donc f est décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3. Comme elle converge par ailleurs vers 0 (croissance comparée classique), le critère spécial des séries alternées assure que $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ converge.

   La série n'est par contre pas absolument convergente : $\left|\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right| = \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n}$, terme général d'une série à termes positifs divergente (série harmonique), ce qui suffit à assurer que $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

3. Voilà une question absolument passionnante : $S_5 = -\dfrac{\ln(1)}{1} + \dfrac{\ln(2)}{2} - \dfrac{\ln(3)}{3} + \dfrac{\ln(4)}{4} - \dfrac{\ln(5)}{5} = \ln(2) - \dfrac{1}{3}\ln(3) - \dfrac{1}{5}\ln(5)$ en utilisant le fait que $\ln(4) = 2\ln(2)$. Avec les valeurs approchées données, on peut dire que $S_5 \simeq 0.69 - 0.37 - 0.32$, c'est-à-dire une valeur extrêmement proche de 0 (en fait, S_5 est très légèrement positif, de l'ordre de 0.005). On en déduit $S_6 = S_5 + \dfrac{\ln(6)}{6} = \ln(2) - \dfrac{1}{3}\ln(3) - \dfrac{1}{5}\ln(5) + \dfrac{\ln(2)+\ln(3)}{6} = \dfrac{7}{6}\ln(2) - \dfrac{1}{6}\ln(3) - \dfrac{1}{5}\ln(5)$. Puisque S_5 était pratiquement nulle, $S_6 \simeq \dfrac{\ln(6)}{6} \simeq \dfrac{1.79}{6} \simeq 0.3$.

4. (a) Avec l'hypothèse $n \geqslant 3$, on sait que la fonction f définie à la question 2 est décroissante sur l'intervalle $[n, n+1]$, qui est inclus dans l'intervalle $[e, +\infty[$. En particulier, $\forall x \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leqslant f(x)$. En intégrant cette inégalité entre n et $n+1$, on obtient immédiatement $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$.

   (b) Calculons donc $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{1}{2}\ln^2(n) = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2(n))$. Or, d'après la question précédente, $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln^2(t)\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2(n))$ (oui, il fallait juste se rendre compte que l'intégrale se calcule directement). On en déduit que $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, et donc que (v_n) est décroissante (à partir du rang 3 au moins).

   Pour montrer la convergence de cette suite décroissante, il faut arriver à la minorer. Pour cela, on utilise la même astuce qu'à la question précédente : si $n \geqslant 3$, $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2(n))$ (toujours en exploitant la décroissance de f sur $[3, +\infty[$). On a donc (en isolant le terme numéro 2 de la somme pour lequel l'inégalité n'est pas encore valable) $v_n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(\ln^2(k+1) - \ln^2(k)) - \frac{1}{2}\ln^2(n)$. Après télescopage, on trouve $v_n \geqslant \dfrac{1}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln^2(n+1) - \dfrac{1}{2}\ln^2(3) - \dfrac{1}{2}\ln^2(n) \geqslant \dfrac{1}{2}\ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln^2(3)$ par croissance de la fonction ln. Notre suite est donc décroissante et minorée, elle converge vers une limite supérieure ou égale à $\dfrac{\ln(2) - \ln^2(3)}{2}$ (valeur légèrement négative, pour information).

5. La première expression est une conséquence classique de l'« astuce belge » consistant à transformer dans une somme alternée les termes négatifs en termes positifs, quitte à les soustraire deux fois ensuite. Ici, en séparant entiers pairs et impairs, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$ (attention quand même à la numérotation pour les termes impairs), donc $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} = S_{2n}$.
   En simplifiant les 2 dans la première somme et en « développant » le ln, on en déduit que $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$. Il suffit de reprendre la définition de v_n : $S_{2n} = \ln(2)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n + \frac{1}{2}\ln^2(n) - v_{2n} - \frac{1}{2}\ln^2(2n)$. Or, $\ln^2(2n) = (\ln(2) + \ln(n))^2 = \ln^2(2) + 2\ln(2)\ln(2) + \ln^2(n)$,

donc $S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\ln(n)$.

6. On sait déjà que $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma$, et comme la suite (v_n) converge, $\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim_{n\to+\infty} v_n$, donc $\lim_{n\to+\infty} v_n - v_{2n} = 0$ (même pas besoin de connaître la valeur de la limite de (v_n)). En combinant tout celà, on trouve bien $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \gamma\ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2}$.
7. En notant l la limite obtenue à la question précédente, la série (S_n) étant alternée, on a nécessairement $S_5 < l < S_6$ (et plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 2$ (puisque la décroissance de f n'est vraie que pour $n \geqslant 3$), $S_{2n-1} < l < S_{2n}$. L'inégalité $S_5 > 0$ implique donc $l > 0$, soit $\gamma\ln(2) - \frac{1}{2}\ln^2(2) > 0$ et donc $\gamma > \frac{\ln(2)}{2} \simeq 0.35$. De même, $S_6 < \frac{1}{3}$ implique $l < \frac{1}{3}$, donc $\gamma\ln(2) - \frac{1}{2}\ln^2(2) < \frac{1}{3}$ et $\gamma < \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{3\ln(2)} \simeq 0.35 + \frac{1}{2.1} < 0.85$. On est encore bien loin d'un encadrement précis, et la convergence de (S_n) étant très lente, il faudrait aller bien trop loin dans le calcul des sommes partielles pour en obtenir un bon par cette méthode. En fait, $\gamma \simeq 0.577$.

Exercice 2

A. Étude d'applications linéaires.

1. On peut par exemple dire que E est le noyau de l'application linéaire $P \mapsto (P(0), P(4))$, ce qui suffit à prouver que E est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$. L'application qu'on vient de définir étant clairement surjective sur $\mathbb{R}^2$ (par exemple l'image du polynôme X vaut $(0,4)$ et celle du polynôme constant 1 vaut $(1,1)$ et la famille $((0,4),(1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^{\not{2}}$ puisque ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires), le thorème du rang permet d'affirmer que son noyau a pour dimension $\dim(\mathbb{R}_4[X]) - \dim(\mathbb{R}^2) = 5 - 2 = 3$, donc $\dim(E) = 3$.
2. L'application f est clairement linéaire : $f(\lambda P_1 + \mu P_2) = Q(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda QP_1 + \mu QP_2 = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$. Elle est bien à valeurs dans E puisque le polynôme QP est de degré inférieur ou égal à $d°(Q) + d°(P) \leqslant 2 + 2 = 4$, et que QP, étant un multiple de $Q = X(X-4)$, s'annule nécessairement en 0 et en 4 (ce qui prouve que $f(P) \in E$). Les espaces $\mathbb{R}_2[X]$ et E étant de même dimension 3, il suffit de prouver que f est injective pour que ce soit un isomorphisme (conséquence du theorème du rang). Ici, $f(P) = 0 \Leftrightarrow QP = 0 \Leftrightarrow P = 0$ car $\mathbb{R}_2[X]$ est un anneau intègre, donc f est bien injective, et c'est un isomorphisme.
3. L'image par f de n'importe quelle base de $\mathbb{R}_2[X]$ sera une base de E, par exemple celle de la base canonique $(Q, QX, QX^2) = (X^2 - 4X, X^3 - 4X^2, X^4 - 4X^3)$.
4. (a) Le degré de $P(X+1)$ étant le même que celui de P, on aura toujours $d°(\Delta(P)) \leqslant d°(P)$. De plus, Δ est clairement linéaire, donc c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Pour ne pas nous embêter, posons brutalement $P(X) = aX^2 + bX + c$, et calculons $\Delta(P) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c = aX^2 + 2aX + a + bX + b - aX^2 - bX = 2aX + a + b$. Cette image est nulle si et seulement si $2a = a + b = 0$, donc si $a = b = 0$, donc $\ker(\Delta) = \mathrm{Vect}(1)$. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(\Delta)) = 3 - 1 = 2$, et $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{Vect}(f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(1, 2X+1) = \mathbb{R}_1[X]$. D'après les calculs déjà effectués, $M = \mathrm{Mat}_{can}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Puisqu'on vient de calculer la matrice représentative M de l'application Δ, autant l'ex-

ploiter : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $M^3 = 0$, ce qui prouve que $\Delta^3 = 0$.

5. (a) L'application linéaire g est définie sur l'espace d'arrivée de f, donc sur E, et en est bien en endomorphisme (f^{-1} fait revenir dans $\mathbb{R}_2[X]$, dans lequel on reste en appliquant Δ, puis on retourne dans E en composant par f).
   (b) Un calcul trivial et classique assure que $g^3 = f \circ \Delta^3 \circ f^{-1} = 0$ puisque $\Delta^3 = 0$.
   (c) Puisque f (et donc f^{-1} aussi) est un isomorphisme, $g(P) = 0 \Leftrightarrow \Delta \circ f^{-1}(P) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(P) \in \mathrm{Vect}(1)$. Autrement dit, P est l'image par f d'un polynôme constant, donc $P = \lambda Q$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qu'on peut écrire $\ker(g) = \mathrm{Vect}(Q)$. En appliquant comme d'habitude le théorème du rang, on aura donc $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 2$. De plus, comme on connait déjà une base de E dont l'un des vecteurs est dans le noyau, on a $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(QX), g(QX^2))$. Il ne reste plus qu'à calculer ces deux polynômes : $g(QX) = f \circ \Delta \circ f^{-1}(QX) = f(\Delta(X)) = f(1) = Q$, et de même $g(QX^2) = f(\Delta(X^2)) = f(2X+1) = 2QX$, donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(Q, 2QX)$.
   (d) Supposons que $\lambda \neq 0$ soit valeur propre de g. Il existe alors au moins un polynôme non nul P vérifiant $g(P) = \lambda P$ (vecteur propre associé à λ). Mais dans ce cas $g^2(P) = g(\lambda P) = \lambda g(P) = \lambda^2 P$, puis $g^3(P) = \lambda^3 P$, qui est manifestement non nul. Celà contredit le fait que $g^3 = 0$, donc λ ne peut pas être valeur propre de g.

   Si g était diagonalisable, on pourrait trouver une base de E constituée de vecteurs propres de g, donc de vecteurs appartenant à $\ker(g)$ (puisque 0 est la seule valeur propre disponible). Comme $\dim(\ker(g)) = 1$, c'est absurde, et g n'est pas diagonalisable.

B. Étude d'un produit scalaire.

1. Il y a donc trois choses à vérifier :
   - φ est symétrique de façon évidente : $\varphi(P_2, P_1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} P_2(k)P_1(k) = \varphi(P_1, P_2)$.
   - la linéarité de φ_1 est facile : si on fixe le polynôme P_1, alors $\varphi(P_1, \lambda P_2 + \mu P_3) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} P_1(k)(\lambda P_2(k) + \mu P_3(k)) = \lambda \sum_{k=0}^{4} P_1(k)P_2(k) + \mu \sum_{k=0}^{4} P_1(k)P_3(k) = \lambda\varphi(P_1, P_2) + \mu\varphi(P_1, P_3)$. La linéarité de φ_2 se prouve de façon identique (on peut aussi utiliser la symétrie déjà démontrée pour se contenter d'une seule des deux vérifications).
   - $\varphi(P, P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} P(k)^2$ est positif comme somme de réels positifs. De plus, cette somme ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, donc si $\forall k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $P(k) = 0$. Le polynôme P aurait alors (au moins) cinq racines, donc il est nul (puisqu'on travaille dans $\mathbb{R}_4[X]$).

2. Si vous êtes attentif, vous aurez reconnu dans L_1, L_2 et L_3 des polynômes interpolateurs de Lagrange, d'où leur notation. Mais faisons comme si on n'avait rien vu : la famille est constituée de trois polynômes dans un espace vectoriel de dimension 3, il suffit donc de prouver qu'elle est libre. Supposons alors $aL_1 + bL_2 + cL_3 = 0$. En évaluant l'égalité pour $X = 1$, on obtient immédiatement $2a = 0$, donc $a = 0$. De même, en évaluant pour $X = 2$, $-b = 0$ donc $b = 0$ et en évaluant pour $X = 3$, $2c = 0$ donc $c = 0$. La famille est libre, c'est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Elle est particulier génératrice, on peut donc écrire $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$. À nouveau, un peu d'astuce permet d'éviter des calculs pénibles : en évaluant l'égalité pour $X = 1$, $X = 2$

et $X = 3$, on trouve cette fois-ci $P(1) = 2\lambda_1$, $P(2) = -\lambda_2$ et $P(3) = 2\lambda_3$, ce qui prouve que $P = \left(\dfrac{P(1)}{2}, -P(2), \dfrac{P(3)}{2}\right)_{(L_1,L_2,L_3)}$.

3. Calculons $\Delta(L_1) = L_1(X+1) - L_1(X) = (X-1)(X-2) - (X-2)(X-3) = (X-2)(X-1-X+3) = 2(X-2)$. Pour obtenir rapidement les coordonnées de ce polynôme dans la base (L_1, L_2, L_3), on utilise la question précédente et on calcul sa valeur en 1 (qui vaut -2), sa valeur en 2 (qui est nulle) et sa valeur en 3 (qui vaut 2) pour en déduire que $\Delta(L_1) = -L_1 + L_3$, ce qui correspond bien à la première colonne donnée pour la matrice M. De même, $\Delta(L_2) = X(X-2) - (X-1)(X-3) = 2X - 3 = -\dfrac{1}{2}L_1 - L_2 + \dfrac{3}{2}L_3$ (en calculant à nouveau les valeurs du polynôme en 1, en 2 et en 3), et $\Delta(L_3) = X(X-1) - (X-1)(X-2) = 2(X-1) = -2L_2 + 2L_3$, ce qui confirme les derniers coefficients de la matrice M.
4. Les polynômes L_i sont définis dans un ordre qui fait que $L_i(i) \neq 0$, et Q ne s'annule pas en 1, 2 ou 3, donc effectivement $M_i(i) \neq 0$.
5. La famille (M_1, M_2, M_3) est l'image par l'isomorphisme f de la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$, donc est une base de E. Le fait de diviser chaque vecteur par un réel non nul ne change pas le fait qu'il s'agit d'une base. De plus, $\varphi(N_i, N_i) = \dfrac{1}{M_i(i)^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{4} M_i(k)^2$ (attention, comme l'application est **bi**linéaire, la constante sort deux fois de la somme). Or, le polynôme M_i s'annule en 0 et en 4 (c'est un multiple de Q) mais aussi en j si $j \in \{1, 2, 3\}$ et $j \neq i$ (par exemple le polynôme L_1, et donc M_1 aussi, s'annule en 2 et en 3). Autrement dit, la somme ne contient en fait qu'un seul terme, celui correspondant à $k = i$, et $\varphi(N_i, N_i) = \dfrac{1}{M_i(i)^2} \times M_i(i)^2 = 1$. Pour le calcul de $\varphi(N_i, N_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} N_i(k)N_j(k)$ avec $j \neq i$, c'est encore pire puisque tous les termes sont nuls (les deux polynômes s'annulent en 0 et en 4, et au moins un des deux en 1, en 2 et en 3), ce qui confirme que $\varphi(N_i, N_j) = 0$.
6. Par définition, $f(L_1) = QL_1 = M_1$ et $N_1 = \dfrac{1}{M_1(1)} M_1 = \dfrac{1}{Q(1) \times L_1(1)} M_1 = -\dfrac{1}{6} M_1$, donc $f(L_1) = -6N_1$. De même, $f(L_2) = M_2$ et $N_2 = \dfrac{1}{Q(2) \times L_2(2)} M_2 = \dfrac{1}{4} M_2$, donc $f(L_2) = 4N_2$. Enfin, $f(L_3) = M_3$ et $N_3 = \dfrac{1}{Q(3) \times L_3(3)} M_3 = -\dfrac{1}{6} M_3$, donc $f(L_3) = -6N_3$. La matrice recherchée est donc diagonale, égale à $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.
7. Il suffit d'effectuer le produit des matrices de f, de Δ et de f^{-1} dans les bonnes bases. On vient de calculer celle de f, on connaît déjà celle de Δ, et celle de f^{-1} est l'inverse de celle de f (dans la base (N_1, N_2, N_3) au départ et (L_1, L_2, L_3) à l'arrivée), qui se calcule trivialement puisque la matrice est diagonale. Finalement, $\mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3)}(g) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \times$
$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{9}{4} & 2 \end{pmatrix}.$$
Calcul qui ne présente pas un grand intérêt puisqu'on ne fera strictement rien de cette superbe matrice...
8. Par construction, $N_i(i) = 1$ et $N_i(j) = 0$ si $j \neq i$, donc $u(N_i) = N_i$. On en déduit que $u(u(P)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} u(P(i)N_i) = \sum_{i=1}^{3} P(i)u(N_i) = \sum_{i=1}^{3} P(i)N_i = u(P)$, ce qui prouve que $u^2 = u$ et donc que u est un projecteur. De plus, en appliquant les différentes linéaires disponibles,

$\varphi(P-u(P),N_i) = \varphi(P,N_i)-\varphi(u(P),N_i) = \sum_{k=0}^{4} P(k)N_i(k) - \sum_{j=1}^{3} P(j)\varphi(N_j,N_i)$. Avec le calcul de $N_i(k)$ rappelé en début de question et les résultats de la question 5, on en déduit que $\varphi(P-u(P),N_i) = P(i)-P(i) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Problème (ESSEC 2016)

I. Étude de la fonction φ.

1. On a imposé que x ne soit pas entier pour que tous les termes de la série soient définis. Si c'est le cas, $\dfrac{2x}{n^2-x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente, donc la série converge (elle est même absolument convergente si on ne veut pas s'embêter à préciser qu'il n'y a pas de problème avec les signes).
2. Le domaine de définition de φ est symétrique par rapport à 0 et, de façon évidente, $\varphi(-x) = -\dfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2-x^2} = -\varphi(x)$, donc φ est impaire. De plus, $\dfrac{2x}{n^2-x^2} = \dfrac{(n+x)-(n-x)}{(n+2)(n-x)} = \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$, donc $\varphi(x+1) = \dfrac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n-x-1} + \dfrac{1}{n+x+1}$. On aimerait faire des décalages d'indice dans les sommes, mais attention, on ne peut pas séparer les sommes (sinon on va se retrouver avec des séries divergentes) donc il faut travailler avec une somme partielle : $\dfrac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n-x-1} + \dfrac{1}{n+x+1} = \dfrac{1}{x+1} - \sum_{n=0}^{N-1} \dfrac{1}{n-x} + \sum_{n=2}^{N+1} \dfrac{1}{n+x}$. En insérant le $\dfrac{1}{x+1}$ dans la deuxième somme et en isolant le premier terme de la première somme, on obtient $\dfrac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N-1} \dfrac{1}{n-x} + \sum_{n=1}^{N+1} \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N-1} \dfrac{2x}{n^2-x^2} + \dfrac{1}{N+x} + \dfrac{1}{N+1+x}$. Quand on fait tendre N vers $+\infty$, les deux derniers termes ont une limite nulle, ce qui prouve la convergence de notre somme vers $\varphi(x)$. On a donc prouvé que $\varphi(x+1) = \varphi(x)$, la fonction est périodique de période 1.
3. (a) Une fois éliminé le $\dfrac{1}{x}$ et le premier terme de la somme, tous les termes sont définis pour $x=0$ et $x=1$, et la série converge par la même argument qu'à la première question. L'égalité demandée est triviale, il suffit d'isoler dans la définition de φ le premier terme $\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$ d'après la décomposition effectuée plus haut.

   (b) On va effectuer la majoration terme par terme. Posons $g_n(x) = \dfrac{2x}{n^2-x^2} = \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$, alors $g_n(x+h)-g_n(x) = \dfrac{1}{n-x-h} - \dfrac{1}{n+x+h} - \dfrac{1}{n-x} + \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{1}{n-x-h} - \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x+h} + \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{h}{(n-x-h)(n-x)} + \dfrac{h}{(n+x+h)(n+x)}$. Or, avec les hypothèses faites sur x et sur h dans l'énoncé, $n-x \geqslant n-1$, $n-x-h \geqslant n-\dfrac{3}{2}$, $n+x \geqslant n > n-1$ et $n+x+h \geqslant n-\dfrac{1}{2} > n-\dfrac{3}{2}$ (tout étant positif sauf éventuellement h), donc en pssant aux inverses $|g_n(x+h)-g_n(x)| \leqslant \dfrac{2|h|}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$. Il reste plus qu'à additionner ces majorants pour tous les entiers n pour conclure (la série à droite étant convergente puisque son terme général est équivalent à $\dfrac{2}{n^2}$, on obtient bien une constante finie pour la valeur de C.

   (c) L'encadrement $0 \leqslant |g(x+h)-g(x)| \leqslant C|h|$ prouve, à l'aide du théorème des gendarmes, que $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, et donc que g est continue en x. Puisque le résultat est valable pour tout $x \in [0,1]$, g est bien continue sur $[0,1]$, donc φ est continue sur $]0,1[$ comme somme de fonctions continues en reprenant la formule de la question 3.a. Étant périodique de période 1, elle est alors continue sur tous les intervalles de la forme $]k,k+1[$ pour $k \in \mathbb{Z}$, donc sur D tout entier.

4. La fonction g étant continue en 0 (et vérifiant d'ailleurs clairement $g(0) = 0$), l'expression $\varphi(x) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x)$ a pour limite $-1+1+0 = 0$ quand x tend vers 0, ce qui prouve que $\varphi(x) - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} o(1)$, et donc la formule souhaitée, qui implique en particulier $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$. La fonction φ étant 1-périodique, $\varphi(x) \underset{x\to 1}{=} \varphi(x-1) \underset{x-1\to 0}{=} \frac{1}{x-1} + o(1)$. En particulier, $\varphi(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

II. Étude d'un opérateur linaire.

1. (a) L'énoncé ayant affirmé que T était linéaire, sa restriction à F_n l'est aussi. De plus, les polynômes $P\left(\frac{X}{2}\right)$ et $P\left(\frac{X+1}{2}\right)$ ayant le même degré que P, on a $d^\circ(T(P)) \leqslant d^\circ(P)$, donc T_n est bien un endomorphisme de F_n.

   (b) Calculons bêtement les images par T_3 des polynômes de la base canonique : $T_3(1) = 1+1 = 2$, $T_3(X) = \frac{X}{2} + \frac{X+1}{2} = X + \frac{1}{2}$, $T_3(X^2) = \frac{X^2}{4} + \frac{(X+1)^2}{4} = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}$, et enfin $T_3(X^3) = \frac{X^3}{8} + \frac{(X+1)^3}{8} = \frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{8}X^2 + \frac{3}{8}X + \frac{1}{8}$. La matrice demandée est donc $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

   (c) À défaut de connaissances, on compense avec un peu d'intuition en « devinant » les valerus propres et en trouvant les vecteurs propres correspondants grâce à la matrice triangulaire supérieure qu'on vient d'otenir :

   - 2 est valeur propre de T_3 avec pour vecteur propre associé le polynôme 1, on le voit dans la première colonne.
   - 1 est valeur propre de T_3 avec pour vecteur propre associé $X - \frac{1}{4}$, il suffit de combiner les deux premières colonnes de la matrice pour s'en apercevoir.
   - de même, $\frac{1}{2}$ est valeur propre avec pour vecteur propre associé $X^2 - \frac{1}{2}X$, et $\frac{1}{4}$ est valeur propre avec comme vecteur propre associé $X^3 - \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{32}$.

   La famille constituée des quatre vecteurs propres obtenus est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est une famille de polynômes échelonnée) dans laquelle la matrice de T_3 sera diagonale. L'endomorphisme T_3 est donc diagonalisable. Vous verrez l'an prochain qu'un endomorphisme ayant une matrice associée triangulaire supérieure a toujours pour valeurs propres les coefficients diagonaux de cette matrice, et qu'un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension n est toujours diagonalisable.

2. (a) Les calculs de la question précédente montrent que la fonction constante égale à 1 (et donc plus généralement toutes les fonctions constantes) appartiennent à ce noyau. On en déduit que $T - 2\,id$ n'est pas injective (mais elle peut être surjective, on est en dimension infinie ici).

   (b) La fonction f est continue sur $[0,1]$ (définition de l'espace E sur lequel est défini T), donc atteint ses bornes (théorème du maximum).

(c) Par hypothèse, $T(f) = 2f$, donc $2f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$. Le membre de gauche de cette égalité vaut $2m$, le membre de droite est constitué de deux nombres supérieurs ou égaux à m (c'est la définition d'un minimum !). Elle ne peut être vraie que si $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = m$. On démontre ensuite par récurrence triviale que $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$: c'est vrai pour $n = 1$, et si on le suppose pour un entier n, on applique le calcul précédent pour en déduire que $f\left(\frac{1}{2} \times \frac{x_0}{2^n}\right) = f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = m$. En faisant tendre n vers $+\infty$, $\frac{x_0}{2^n}$ tend vers 0, et par continuité de f, on a $f(0) = m$.

(d) On prouve de façon symétrique que, si $f(x_1) = M$, alors $f\left(\frac{x_1}{2}\right) = M$ (cette fois, $2M$ est la somme de deux termes qui sont chacun inférieurs ou égaux à M), puis par récurrence que $f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M$. On conclut en passant à la limite. Puisque $m = f(0) = M$, on en déduit que $M = m$ et donc que f est constante. Autrement dit, $\ker(T - 2\,id) = \text{Vect}(1)$.

3. (a) La fonction g est impaire comme quotient d'un cosinus pair par un sinus impair, et $g(x+1) = \pi\frac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \pi \times \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = g(x)$ donc g est 1-périodique.

(b) On sait que $\cos(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\sin(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} \pi x$, donc $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{\pi x} \sim \frac{1}{x}$. Pour obtenir mieux, il faire un début de développement limité de $g(x) - \frac{1}{x} = \frac{\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)} = \frac{\pi x(1 - \frac{\pi^2x^2}{2} + o(x^3)) - \pi x + \frac{\pi^3x^3}{6} + o(x^3)}{\pi x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{\pi^3x^3}{3} + o(x^3)}{\pi x^2 + o(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{\pi^3x^3}{3}}{\pi x^2} \sim -\frac{\pi^2 x}{3}$, ce qui prouve bien que $g(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{\pi^2 x}{3} + o(x)$.

(c) On applique simplement la périodicité de la fonction : $g(x) \underset{x\to 1}{=} g(x-1) = \frac{1}{x-1} - \frac{\pi^2(x-1)}{3} + o(x-1)$.

(d) Un petit peu de révisions de trigo ne peut jamais faire de mal (normalement, ce sont des formules assez faciles qui servent ici) : $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi\cos(\frac{\pi x}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2})} + \frac{\pi\cos(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2})} = \frac{\pi\cos(\frac{\pi x}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2})} + \frac{-\pi\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \frac{\pi(\cos^2(\frac{\pi x}{2}) - \sin^2(\frac{\pi x}{2}))}{\sin(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2})} = \frac{\pi\cos(\pi x)}{\frac{1}{2}\sin(\pi x)} = 2g(x)$.

4. (a) Encore des manipulations de sommes un poil pénibles car on ne peut pas séparer les sommes divergentes : $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n - \frac{x}{2}} - \frac{1}{n + \frac{x}{2}}\right) + \frac{2}{x+1}$
$- \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n - \frac{x+1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{x+1}{2}}\right) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x} - \frac{2}{2n-1-x} + \frac{2}{2n+1+x}\right)$.
On calcule alors la somme partielle correspondant à la série à droite de cette formule :
$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x} - \frac{2}{2n-1-x} + \frac{2}{2n+1+x}\right) =$
$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x}\right) + \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{2n+1+x} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{2}{2n+1-x} =$
$\sum_{k=1}^{2N+1}\left(\frac{2}{k-x} - \frac{2}{k+x}\right) + \frac{2}{1+x} - \frac{2}{2N+1-x}$ (en sortant de la somme les termes qui manquent pour avoir tous les pairs et tous les impairs inférieurs à $2N+1$ qui apparaissent

dans le calcul). Quand on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient alors $\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=$ $\frac{2}{x}+\frac{2}{x+1}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4x}{k^2-x^2}-\frac{2}{1+x}=2\varphi(x)$, comme prévu.

(b) C'est une conséquence des développements asymptotiques donnés précédemment pour φ et pour g : $\varphi(x)-g(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x}+o(1)-\frac{1}{x}+o(1)=o(1)$, et de même $\varphi(x)-g(x)\underset{x\to 1}{=}o(1)$. Non seulement la fonction est prolongeable par continuité en 0 et en 1, mais elle s'y annule donc.

(c) La fonction obtenue après avoir prolongé $\varphi-g$ est une fonction continue sur $[0,1]$, donc appartenant à l'espace vectoriel E, et vérifiant $T(\varphi-g)=2(\varphi-g)$ d'après les calculs effectués aux questions $3.d$ et $4.a$ (ces calculs ne sont valables que sur $]0,1[$ pour la fonction φ mais on peut les étendre par continuité en 0 et en 1 à $\varphi-g$). Or, le calcul du noyau de $T-2\,id$ prouve alors que la fonction $\varphi-g$ est constante. Comme elle s'annule en 0 et en 1, elle est donc nulle sur tout le segment $[0,1]$, et par périodicité le reste sur D tout entier, ce qui prouve bien que $\forall x\in D$, $\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}$.

5. (a) En reprenant le résultat de la question $3.b$, $1-xg(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{\pi^2}{3}x^2+o(x^2)$, donc $\frac{1-xg(x)}{x^2}\sim\frac{\pi^2}{3}$, ce qui prouve que la limite demandée est égale à $\frac{\pi^2}{6}$.

(b) En sortant le terme numéro 1 de chaque somme, $\left|h(x)-\frac{x^2}{1-x^2}\right|$

$$=\left|\frac{1}{1-x^2}-1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2-x^2}-\frac{1}{n^2}\right)-\frac{x^2}{1-x^2}\right|=\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2(n^2-x^2)}\right|\leqslant x^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)n^2}$$

puisque $n^2-x^2\geqslant n^2-1>0$ (plus besoin donc de valeurs absolues).

(c) La série intervenant dans la formule précédente étant convergente, la limite du majorant lorsque x tend vers 0 est nulle. On en déduit que $\lim_{x\to 0}h(x)=0$, et donc que $\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}=$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

(d) On sait que $\varphi=g$, donc $\frac{1-xg(x)}{2x^2}=\frac{1-x\varphi(x)}{2x^2}=\frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x^2}{n^2-x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}$. La limite de cette fonction étant égale à $\frac{\pi^2}{6}$ d'après la question $5.a$, et la limite de la somme égale à $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)$ d'après la question $5.c$, on a bien prouvé que $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$. Vous avez trouvé ce problème un peu long ? Je vous rassure, je n'ai en fait mis que la moitié, le sujet initial contenait quatre parties ! La suite... au prochain DM.