

Devoir Surveillé n° 8

MPSI Lycée Camille Jullian

5 avril 2025

Exercice 1

1. On reconnaît directement une dérivée de composée pour le premier calcul : $I_2 = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = [-e^{\frac{1}{x}}]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e^1 = e - \sqrt{e}$.

Pour le deuxième calcul, si on veut faire une IPP, on a intérêt à prendre $v'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ qu'on peut intégrer en $v(x) = -e^{\frac{1}{x}}$, ce qui laisse $u(x) = \frac{1}{x}$ et donc $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$. On obtient alors

$$I_3 = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \left[-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{e}}{2} + e - I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{e}.$$

Autre méthode possible (suggérée par l'énoncé) : faire un changement de variable en posant $t = \frac{1}{x}$, ce qui transforme l'élément différentiel en $dt = -\frac{1}{x^2} dx$. On peut donc écrire $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = -te^t dt$, et obtenir ainsi (sans oublier de changer les bornes $I_3 = -\int_{\frac{1}{2}}^1 te^t dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 te^t dt$).

On conclut avec une IPP classique en posant $u(t) = t$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = v(t) = e^t$: $I_3 = [te^t]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = e - \frac{1}{2}\sqrt{e} - e + \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2}$.

2. Pour tout réel $x \in [1, 2]$, pour tout entier naturel n , $0 < x^n \leq x^{n+1}$ donc $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} \leq \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}$, puis en intégrant $I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0 de façon évidente (on intègre toujours des fonctions positives), elle converge donc.

3. La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ étant décroissante sur $[1, 2]$ (composée d'une fonction décroissante par une fonction croissante), on peut écrire que, $\forall x \in [1, 2]$, $e^{\frac{1}{x}} \leq e$, donc $I_n \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n} dx = \left[-\frac{e}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^2 = \frac{e}{n-1} - \frac{e}{(n-1)2^{n-1}}$. Ce majorant ayant une limite nulle (et la suite étant minorée par 0), le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

4. On va de nouveau faire une IPP. Pas besoin de s'embêter à faire des choix intelligents ici (on obtiendra juste la relation « dans le mauvais sens », ce qui n'a aucune importance), on va partir de I_n et poser $u(x) = e^{\frac{1}{x}}$, donc $u'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, et $v'(x) = \frac{1}{x^n}$ qu'on intègre

en $v(x) = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$. On trouve alors $I_n = \left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{(1-n)x^{n-1}} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(1-n)x^{n+1}} dx = \frac{\sqrt{e}}{(1-n)2^{n-1}} - \frac{e}{1-n} + \frac{I_{n+1}}{1-n}$, soit en multipliant tout par $1-n$: $(1-n)I_n = \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e + I_{n+1}$.

Il n'y a plus qu'à passer les constantes à gauche pour obtenir exactement la relation demandée.

5. On a déjà prouvé que la suite (I_n) convergeait, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{1-n} = 0$. Comme on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e}}{(1-n)2^{n-1}} - \frac{e}{1-n} = 0$, la formule de la question précédente (avant multiplication par $1-n$) permet de retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

6. Isolons nI_n dans la relation de récurrence obtenue : $nI_n = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + I_n - I_{n+1}$. aucun problème de calcul de limite ici : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = e$, donc $I_n \sim \frac{e}{n}$.

7. On revient à la définition de la négligeabilité : il s'agit de prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{2^{n-1}} = 0$ (en oubliant la constante $\sqrt{e}$ qui n'aura pas d'influence sur la limite), ce qui est un résultat de croissance comparée classique.

8. Pour l'instant, on sait que $I_n = \frac{e}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $I_{n+1} = \frac{e}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{e}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ puisque $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Il ne reste plus qu'à introduire tout ça dans notre relation de récurrence : $nI_n = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + I_n - I_{n+1} = e + \frac{e}{n} - \frac{e}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ (on utilise le résultat de la question 7 pour se débarrasser discrètement du deuxième terme, qui est négligeable par rapport à ce qu'on met dans notre o ; ce sera de même le cas pour les calculs de la question suivante). Conclusion : $nI_n = e + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $I_n = \frac{e}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

9. On reprend les calculs avec une meilleure précision : $I_n = \frac{e}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $I_{n+1} = \frac{e}{n+1} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{e}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0, on peut appliquer le début d'un DL classique pour obtenir $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où $I_{n+1} = \frac{e}{n} - \frac{e}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il est temps d'introduire dans tout ça dans notre relation : $nI_n = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + \frac{e}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{e}{n} + \frac{e}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = e + \frac{e}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $I_n = \frac{e}{n} + \frac{e}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Un dernier tour pour la route : $I_{n+1} = \frac{e}{n+1} + \frac{e}{(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{e}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{e}{n^3}(1 + o(1)) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{e}{n} - \frac{e}{n^2} + \frac{2e}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, donc on déduit de façon très similaire à ce qu'on a déjà fait précédemment $nI_n = e + \frac{e}{n} + \frac{e}{n^3} - \frac{e}{n} + \frac{e}{n^2} - \frac{2e}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, donc $I_n = \frac{e}{n} + \frac{e}{n^3} - \frac{e}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Exercice 2

1. (a) Pour déterminer le noyau, on résout le système $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -6x + 4y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$. Les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ le transforment en système équivalent : $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -4x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$. Les deux dernières équations obtenues étant

équivalentes, on exprime tout en fonction de x : $y = 2x$, puis $z = x - y = -x$, donc $\ker(f) = \{(x, 2x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 2, -1))$.

Le théorème du rang nous permet d'affirmer que $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$, on calcule les images des vecteurs de la base canonique jusqu'à obtenir une famille libre de deux vecteurs : $\text{Im}(f) = \text{Vect}((-1, -6, 3), (1, 4, -1))$ (les deux vecteurs sont non proportionnels et engendrent donc bien un espace de dimension 2).

- (b) Avec l'information déjà signalée sur la dimension, vérifions simplement que l'intersection du noyau et de l'image est nulle. Supposons donc que $(1, 2, -1) = a(-1, -6, 3) + b(1, 4, -1) = (b-a, 4b-6a, 3a-b)$. La somme des deux coordonnées extrêmes impose $0 = 2a$, donc $a = 0$. Ensuite on obtient les conditions incompatibles $b = 1$, $4b = 2$ et $-b = -1$ en reprenant les trois équations, donc $(1, 2, -1) \notin \text{Im}(f)$, ce qui implique $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ et donc $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

- (c) On calcule brutalement $f^2(x, y, z) = (x - y - z - 6x + 4y + 2z + 3x - y + z, 6x - 6y - 6z - 24x + 16y + 8z + 6x - 2y + 2z, -3x + 3y + 3z + 6x - 4y - 2z + 3x - y + z) = (-2x + 2y + 2z, -12x + 8y + 4z, 6x - 2y + 2z) = 2f(x, y, z)$, donc $f^2 = 2f$.

- (d) Allons-y à nouveau pour un système :
$$\begin{cases} -x & + & y & + & z & = & 2x \\ -6x & + & 4y & + & 2z & = & 2y \\ 3x & - & y & + & z & = & 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x & + & y & + & z & = & 0 \\ -6x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & z & = & 0 \end{cases}$$
 . Les trois équations sont équivalentes, on ne peut rien

faire de plus qu'écrire par exemple $z = 3x - y$, donc $\ker(f - 2id) = \text{Vect}((1, 0, 3), (0, 1, -1))$. Manifestement, le noyau obtenu est de dimension 2, il suffit donc de prouver que $\text{Im}(f) \subset \ker(f - 2id)$ pour que les deux sous-espaces soient égaux (ils ont la même dimension). Or, $(-1, -6, 3) = -(1, 0, 3) - 6(0, 1, -1) \in \ker(f - 2id)$ et $(1, 4, -1) = (1, 0, 3) + 4(0, 1, -1)$, donc l'inclusion souhaitée est vérifiée.

- (e) On va donc chercher à décomposer un vecteur $u = (x, y, z)$ sous la forme $u = a(1, 2, -1) + b(1, 0, 3) + c(0, 1, -1)$, ce qui donne le système
$$\begin{cases} a & + & b & & & = & x \\ 2a & & & + & c & = & y \\ -a & + & 3b & - & c & = & z \end{cases}$$
 . Procédons pour une fois pas substitution : $b = x - a$ et $c = y - 2a$, donc $-a + 3x - 3a - y + 2a = z$, soit $-2a = -3x + y + z$ ou encore $a = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$, dont on déduit $b = x - a = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, et enfin $c = y - 2a = -3x + 2y + z$. Il reste à calculer ce qui est vraiment demandé dans l'énoncé : $v = a(1, 2, -1) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, 3x - y - z, -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)$, et $w = (b, c, 3b - c) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -3x + 2y + z, \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)$.

2. (a) Si f est un isomorphisme, elle admet une réciproque f^{-1} par laquelle on peut composer l'égalité $f^2 = \lambda f$ pour obtenir $f = \lambda id$. L'application f est donc un multiple de l'identité (une homothétie), la réciproque étant évidente.
- (b) Supposons $u \in \text{Im}(f)$, alors $\exists v \in \mathbb{R}^n, u = f(v)$. Dans ce cas, avec l'hypothèse faite sur f , $f(u) = f^2(v) = \lambda f(v) = \lambda u$, donc u vérifie bien $f(u) = \lambda u$ ou, si on préfère, il appartient à $\ker(f - \lambda id)$. Réciproquement, si $f(u) = \lambda(u)$, alors $\lambda u \in \text{Im}(f)$ (puisque'il est l'image de u !), donc $u \in \text{Im}(f)$. Finalement, les deux sous-espaces sont bien égaux.
- (c) Puisqu'on est en dimension finie, le théorème du rang nous donne déjà l'égalité $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$. De plus, si $u \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$, d'après la question précédente, il vérifie $f(u) = \lambda(u)$, mais aussi $f(u) = 0$ (il est dans le noyau), donc $\lambda u = 0$, et $u = 0$ puisque $\lambda \neq 0$. Les deux conditions obtenues suffisent à affirmer que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

- (d) Il suffit de dire que $f \circ (f - \lambda \text{id}) = f^2 - \lambda f = 0$ pour obtenir cette inclusion (c'est dans le cours !). De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f - \lambda \text{id})) = n - \dim(\ker(f - \lambda \text{id})) = n - \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f))$. Les deux espaces sont donc de même dimension, avec une inclusion de l'un dans l'autre, ils sont nécessairement égaux.
- (e) Il suffit de constater que $\left(\frac{1}{\lambda}f\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}f^2 = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda f) = \frac{1}{\lambda}f$, donc $g = \frac{1}{\lambda}f$ est une projection. On peut donc prendre $k = \frac{1}{\lambda}$.

Exercice 3

- Pour que f soit définie en x , il faut que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ soit définie et continue sur le segment $[0, 1]$. Le dénominateur de la fraction ne peut pas poser de problème sur ce segment, par contre le numérateur ne sera défini en 0 que si $x - 1 \geq 0$, donc si $x \geq 1$. On a donc $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$.
- Calculons : $f(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$, puis $f(2) = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t} dt = [t - \ln(1+t)]_0^1 = 1 - \ln(2)$.
- Pour les plus paresseux dont je fais partie, une astuce belge similaire à celle utilisée à la question précédente permet d'éviter le calcul de la décomposition : $\int_a^1 \frac{1}{t(1+t)} dt = \int_a^1 \frac{t+1-t}{t(1+t)} dt = \int_a^1 \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t) - \ln(t+1)]_a^1 = -\ln(2) - \ln(a) + \ln(a+1) = \ln\left(\frac{a+1}{2a}\right)$. Quelle que soit la formulation conservée pour ce résultat, on obtient facilement $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{t(1+t)} dt = +\infty$, ce qui ne permet pas de définir raisonnablement la fonction f en 0 (comme on va le voir plus loin, si on prolonge f au voisinage de 0, elle aura une limite infinie en 0^+).
- Posons donc $u = \sqrt{t}$, ou $t = u^2$, ce qui implique que $dt = 2u du$. On n'oublie pas de modifier les bornes en conséquence : $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} dt = \int_{\sqrt{a}}^1 \frac{1}{u(1+u^2)} \times 2u du = 2 \int_{\sqrt{a}}^1 \frac{1}{1+u^2} du = 2[\arctan(u)]_{\sqrt{a}}^1 = 2\arctan(1) - 2\arctan(\sqrt{a}) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{a})$. Comme $\lim_{a \rightarrow 0} 2\arctan(\sqrt{a}) = 2\arctan(0) = 0$, on en déduit que $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} dt = \frac{\pi}{2}$, qui est donc la valeur logique à donner à $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} dt$.
- Si on considère deux réels x et y vérifiant $1 \leq x < y$, alors $\forall t \in [0, 1]$, $t^{x-1} > t^{y-1}$ (les puissances de nombres compris entre 0 et 1 sont de plus en plus petites, même quand on calcule des puissances réelles quelconques ; si on n'en est pas convaincu, on écrit l'inégalité sous forme exponentielle : $e^{(x-1)\ln(t)} > e^{(y-1)\ln(t)}$ car $\ln(t) < 0$, ce qui renverse le sens de l'inégalité). La division par $1+t$ qui est positif ne modifie pas notre inégalité, et il ne reste plus qu'à l'intégrer entre 0 et 1 pour obtenir $f(x) > f(y)$. La fonction f est donc (strictement) décroissante sur $[1, +\infty[$ (et le serait également sur $]0, 1]$ après prolongement). De plus, f est clairement positive comme intégrale d'une fonction positive.
- Un calcul idiot si on ne se laisse pas perturber par ces puissances un peu inhabituelles : $f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^x}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t)}{1+t} dt = \int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$.

7. Puisque f ne prend que des valeurs positives, on a $0 \leq f(x) \leq f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$. Cet encadrement suffit, à l'aide du théorème des gendarmes, à conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
8. Par décroissance de f , on peut écrire, lorsque $x \geq 2$ (pour que tous les termes aient un sens) $f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$. En ajoutant $f(x)$ partout, on trouve l'encadrement demandé par l'énoncé, qu'on peut réécrire à l'aide du calcul de la question 6 sous la forme $\frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1}$. En particulier, on aura pour ces mêmes valeurs de x : $1 \leq 2xf(x) \leq \frac{x}{x-1}$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$. Une nouvelle application du théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$, soit $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.
9. En appliquant la formule avec $x = \frac{1}{2}$, on devrait avoir $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$, donc $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$. Vérifions : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$. On pose $u = \sqrt{t}$, donc $dt = 2u du$ comme tout à l'heure (les bornes restent par contre inchangées), et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{2u^2+2}{1+u^2} - \frac{2}{1+u^2} du = [2u - 2\arctan(u)]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$ comme prévu.
10. On part de l'égalité $f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1)$ et on fait tendre x vers 0. La fonction f étant continue, le terme $f(x+1)$ va tendre vers $f(1) = \ln(2)$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \ln(2) + o(1)$, développement qui est plus précis que ce qu'on demande. En particulier, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$.
11. On essaye de faire une courbe « qui ressemble à de l'inverse » du côté de 0, mais aussi du côté de $+\infty$ (le facteur 2 ne change pas fondamentalement l'allure de la courbe), et on sait que $f(1) = \ln(2) \simeq 0.7$, $f(2) = 1 - \ln(2) \simeq 0.3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \simeq 1.6$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} \simeq 0.4$. Ce qui donne une allure de ce type :

