Devoir Surveillé n° 8

MPSI Lycée Camille Jullian

5 avril 2025

Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice à la suite (I_n) définie pour $n \geqslant 2$ par $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\,dx$.

1. Calculer la valeur de I_2 par intégration directe, puis celle de I_3 (une IPP bien choisie peut fonctionner, mais ceux qui préfèrent pourront aussi avoir recours à un changement de variable).
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n), en déduire sa convergence.
3. En majorant $e^{\frac{1}{x}}$ sous l'intégrale, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
4. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $I_{n+1} = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.
5. Retrouver la limite de la suite (I_n) à l'aide de la relation de la question précédente.
6. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$. En déduire un équivalent simple de I_n.
7. Expliquer pourquoi on a, $\forall k \geqslant 1$, $\dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$.
8. Montrer que $I_n = \dfrac{e}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On pourra reprendre la relation habituelle, sous la forme $I_n = \dfrac{e}{n} + \dfrac{I_n}{n} - \dfrac{I_{n+1}}{n} - \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}$.
9. Montrer que $I_n = \dfrac{e}{n} + \dfrac{e}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, puis calculer le terme suivant du développement asymptotique de la suite (I_n).

Exercice 2

On va étudier dans cet exercice des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant une relation du type $f^2 = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On notera bien sûr comme d'habitude $f^2 = f \circ f$ dans tout cet exercice.

1. Étude d'un exemple. On définit dans cette question
   $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (-x+y+z, -6x+4y+2z, 3x-y+z) \end{array} \right.$.
   On admet que f est une application linéaire.
   (a) Calculer le noyau et l'image de l'application f.
   (b) Montrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer un réel λ tel que $f^2 = \lambda f$.
   (d) Calculer $\ker(f - 2\,id)$ puis montrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - 2\,id)$.
   (e) Pour un vecteur $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, caluler la décomposition de u dans la somme directe $\ker(f) \oplus \ker(f - 2\,id)$ (autrement dit, déterminer explicitement deux vecteurs $v \in \ker(f)$ et $w \in \ker(f - 2\,id)$ tels que $u = v + w$).

2. Étude du cas général. On suppose dans cette question que l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $f^2 = \lambda f$, avec $\lambda \neq 0$.
   (a) Que vaut f si on suppose en plus (uniquement dans cette sous-question) que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$?
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \{u \in E \mid f(u) = \lambda u\} = \ker(f - \lambda\, id)$.
   (c) Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(f - \lambda\, id) \subset \ker(f)$. Ces deux espaces sont-ils nécessairement égaux ?
   (e) Montrer que f est un multiple d'une projection, donc $f = kg$, avec $g^2 = g$ (aucune connaissance sur les projecteurs autres que la formule $g^2 = g$ n'est nécessaire pour traiter cette question). Quel est le lien entre k et λ ?

Exercice 3

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
3. Pour un réel $a > 0$, calculer $\displaystyle\int_a^1 \frac{1}{t(1+t)}\, dt$ à l'aide d'une décomposition en éléments simples, puis calculer la limite de l'expression obtenue quand a tend vers 0. Ce calcul permet-il de donner une valeur cohérente à $f(0)$?
4. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $\displaystyle\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt$, puis sa limite quand a tend vers 0. En déduire une valeur logique à donner à $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Vous apprendrez l'an prochain qu'on pourrait en fait définir la fonction f sur tout l'intervalle $]0, 1[$. On se contentera pour l'instant, tant que l'énoncé ne précise pas le contraire, d'étudier f sur $[1, +\infty[$.
5. Montrer que f est décroissante sur $[1, +\infty[$ **sans** chercher à calculer sa dérivée f'. Quel est le signe de $f(x)$ lorsque $x \geqslant 1$?
6. Simplifier l'expression de $f(x) + f(x+1)$, pour $x \geqslant 1$.
7. En déduire rigoureusement la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
8. En partant de l'encadrement $f(x+1)+f(x) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x)+f(x-1)$ (à justifier rapidement), obtenir un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.
9. En admettant qu'on peut définir f sur l'intervalle $]0, 1[$ et que la formule obtenue à la question 6 reste valable sur cet intervalle, que devrait logiquement valoir $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$? Vérifier cette valeur en calculant $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ via le changement de variable $u = \sqrt{t}$.
10. Toujours à l'aide de la question 6, et toujours en supposant f définie sur $]0, 1[$, donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.
11. En tenant compte de tous les calculs effectués dans l'exercice, tracer une allure crédible de la courbe représentative de la fonction f sur $]0, +\infty[$.