Devoir Surveillé n^{o} 6

MPSI Lycée Camille Jullian

1$^{\text{er}}$ février 2025

Exercice 1

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.

1. Calculer la dérivée f_n' et la dérivée seconde f_n'' de la fonction f_n.
2. Dresser un tableau de variations complet de la fonction f_n. En déduire l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que la courbe représentative de f_n admet un unique point d'inflexion, préciser ses coordonnées ainsi que l'équation de la tangente à la courbe en ce point.
4. Tracer une allure crédible, dans un même repère, des courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 (on indiquera sur ce graphique les valeurs de u_1 et u_2, sans chercher à les calculer précisément).
5. Montrer que $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$. En déduire la limite de la suite (u_n).
6. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire la monotonie de la suite (u_n).
7. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$.

Exercice 2

On note dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les trois premières questions de l'exercice sont complètement indépendantes (trois méthodes différentes pour calculer les puissances de la matrice A).

1. Calcul de A^n à l'aide de suites récurrentes.
   (a) Calculer A^2 et déterminer deux entiers a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.
   (b) Déduire du calcul précédent que A est inversible, et donner l'expression explicite de A^{-1}.
   (c) Démontrer l'existence pour tout entier naturel n de deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI_3$.
   (d) Calculer a_n et b_n en fonction de n, et en déduire la valeur de A^n (on ne demande **pas** d'écrire entièrement la matrice A^n).
2. Calcul de A^n par binôme de Newton astucieux.
   (a) En posant $J = \dfrac{1}{4}(A + 3I_3)$, écrire explicitement la matrice J et calculer J^2 (si vous ne remarquez rien, recommencez). En déduire la valeur de J^n. Pour quelles valeurs de n cette formule est-elle valable ?
   (b) À l'aide du binôme de Newton, en déduire une expression de A^n en fonction de J et de I_3.
   (c) La formule obtenue reste-t-elle vraie pour $n = -1$?

3. Calcul de A^n par diagonalisation.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1} (méthode au choix).
   (b) Calculer $P^{-1}AP$. Si vous n'obtenez pas une matrice diagonale, recommencez. On note D cette matrice diagonale.
   (c) Exprimer A^n en fonction de D^n (on démontrera la formule), sans chercher à calculer explicitement A^n.
4. Calcul du commutant de la matrice A.
   (a) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $N = P^{-1}MP$. Montrer que $MA = AM \Leftrightarrow DN = ND$, où N est la matrice définie dans la question 3.
   (b) Déterminer toutes les matrices N commutant avec la matrice D.
   (c) En déduire que les matrices commutant avec A sont combinaisons linéaires de cinq matrices à préciser.

Exercice 3

On considère dans cet exercice une suite (u_n) définie par $u_0 = a$ (avec $a \in \mathbb{R}$ indéterminé) et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n^2 - 4)$. On posera classiquement $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 4)$.

1. Déterminer les limites **possibles** de la suite (u_n).
2. Effectuer une étude rapide de f, ainsi que du signe de $f(x) - x$, et tracer dans un même repère une allure de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.
3. Représenter sur le graphique précédent les premiers termes de la suite (u_n) dans les deux cas suivants : $a = 1$ et $a = 4$.
4. On suppose dans cette question que $a > 1 + \sqrt{5}$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1 + \sqrt{5}$.
   (b) Montrer que la suite est monotone, puis déterminer la nature (convergente ou divergente) de la suite (u_n).
5. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers $1 + \sqrt{5}$ (la valeur de a étant à nouveau quelconque).
   (a) Montrer que, $\forall x \in [2, 4]$, $|f(x) - (1 + \sqrt{5})| \geqslant 2|x - (1 + \sqrt{5})|$.
   (b) Montrer rigoureusement que, si **aucun** terme de la suite (u_n) n'est égal à $1 + \sqrt{5}$, alors la suite ne peut pas converger vers $1 + \sqrt{5}$.
   (c) Déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 + \sqrt{5}$.
6. On suppose dans cette question que $a \in]0, 1 + \sqrt{5}[$.
   (a) Montrer par l'absurde qu'il existe un entier n_0 pour lequel $u_{n_0} \notin]0, 1 + \sqrt{5}[$ (quelle serait la monotonie de (u_n) sinon ?).
   (b) Montrer qu'il existe un entier n_1 pour lequel $u_{n_1} \in [-2, 0]$
7. On suppose dans cette question que $a \in [-2, 0]$.
   (a) Que se passe-t-il dans les cas particuliers $a = 0$ et $a = -2$?
   (b) Existe-t-il d'autres valeurs de a (pas nécessairement comprises entre -2 et 0) pour lesquelles (u_n) est périodique **à partir d'un certain rang** ?
   (c) Montrer que, si $a \in]-2, 0[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-2, 0[$.
   (d) Étudier le signe de $f \circ f(x) - x$.
   (e) Montrer que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

(f) Montrer que les deux sous-suites convergent, et préciser leur limite (attention, il y a un cas très particulier pour a à ne pas oublier).

(g) En déduire la nature de la suite (u_n) (convergente ou divergente).

8. Que se passe-t-il si $a < -2$ (pas besoin d'être très précis pour cette question) ?
9. (pour les plus motivés, car la question est en fait difficile) Décrire précisément l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles la suite (u_n) converge.

Exercice 4

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **semi-magique** s'il existe un réel k tel que, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = k$, et $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = k$. Autrement dit, la somme des coefficients de chaque ligne **et** de chaque colonne de M est toujours égale à la même constante k. On note alors $k = s(M)$. On évitera dans la mesure du possible les calculs matriciels laborieux dans cet exercice.

1. Donner un exemple de matrice semi-magique appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne sont 1, 2 et 3.
2. Montrer qu'une matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux est semi-magique. Que vaut $s(M)$ pour une telle matrice ?
3. Montrer que l'ensemble des matrices semi-magiques d'ordre n est stable par combinaison linéaire : si M et N sont semi-magiques et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $M + \lambda N$ est semi-magique.
4. On note $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, et E l'ensemble de toutes les matrices semi-magiques d'ordre 3. Montrer que $M \in E$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $MJ = JM = \lambda J$, et exprimer λ en fonction de $s(A)$.
5. En déduire que le produit de deux matrices de E appartient à E, et que $s(MN) = s(M)s(N)$.
6. Si $M \in E$ est inversible, montrer que $M^{-1} \in E$ et que $s(M^{-1}) = \dfrac{1}{s(M)}$.
7. On appelle désormais **matrice magique** une matrice appartenant à E et vérifiant en plus $m_{11} + m_{22} + m_{33} = m_{13} + m_{22} + m_{31} = s(M)$. On notera F l'ensemble de toutes les matrices magiques.

   Donner un exemple de matrice magique dont tous les coefficients ne sont pas égaux.
8. Montrer que, si $M \in F$, alors $s(M) = 3m_{22}$.
9. Montrer que F est stable par transposition.
10. Déterminer toutes les matrices symétriques appartenant à F, puis toutes les matrices antisymétriques appartenant à F (on pourra utiliser le résultat de la question 8 même si on n'a pas réussi à le démontrer).
11. On admet que toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Montrer que toute matrice magique peut s'écrire comme combinaison linéaire de trois matrices fixes à préciser.