Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 5 : Sujet A

MPSI Lycée Camille Jullian

11 janvier 2025

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$. On donnera la forme algébrique de toutes les solutions obtenues.

Exercice 2

On considère dans cet exercice une suite (u_n) dont tous les termes sont égaux à ± 1 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ ou $u_n = -1$. À partir de cette suite, on crée une deuxième suite (S_n) obtenue en calculant les sommes partielles de la suite (u_n) : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit qu'un entier $k \in \mathbb{Z}$ est une **valeur infiniment répétée** pour la suite (S_n) si l'ensemble $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid S_n = k\}$ est un ensemble infini.

1. Montrer rigoureusement que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \in \mathbb{Z}$.
2. Donner un exemple de suite (u_n) pour laquelle S_n prend toutes les valeurs entières naturelles exactement une fois. La suite créée est-elle unique ?
3. Donner ensuite un exemple de suite (u_n) pour laquelle (S_n) prend toutes les valeurs entières (y compris les valeurs négatives) **au moins** une fois (une bonne explication plutôt qu'une formule explicite sera acceptée). Peut-on créer une suite pour laquelle chaque valeur dans $\mathbb{Z}$ est atteinte **exactement** une fois ? On justifiera la réponse proposée.
4. On pose, uniquement pour cette question, $u_n = (-1)^n$. Décrire dans ce cas la suite (S_n) (un léger bonus sera accordé si on arrive à donner une fomule unique pour tous les termes de la suite), et préciser quelles sont ses valeurs infiniment répétées.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire une suite (u_n) pour laquelle la suite (S_n) admet pour valeurs infiniment répétées tous les entiers compris entre 0 et n (et aucun autre !).
6. Démontrer rigoureusement qu'il est impossible que la suite (S_n) admette **exactement une** valeur infiniment répétée.
7. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, avec $p \leqslant q$, et notons $a = S_p$ et $b = S_q$. On suppose que $a < b$. Soit enfin c un entier vérifiant $a \leqslant c \leqslant b$.
   (a) Justifier rigoureusement l'existence de l'entier $n_1 = \min\{n \geqslant p \mid \forall i \in \{n, \dots, q\}, S_i \geqslant c\}$.

(b) Montrer que $S_{n_1} = c$.

(c) Justifier que $p \leqslant n_1 \leqslant q$. À quel théorème classique vous fait penser le résultat qu'on vient de prouver ?

(d) Le résutat reste-t-il valable si on enlève l'hypothèse $a < b$?

8. Soient a et b deux valeurs infiniment répétées de la suite (S_n) et c un entier compris entre a et b. Démontrer que c est aussi une valeur infiniment répétée de la suite (S_n).
9. Que peut-on dire des valeurs infiniment répétées d'une suite (S_n) vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$? On attend bien sûr une démonstration du résultat énoncé.
10. On suppose désormais que la suite $(|S_n|)$ **ne tend pas** vers $+\infty$. Démontrer que (S_n) a au moins une valeur infiniment répétée.
11. Donner un exemple de suite (u_n) pour laquelle **tous** les entiers naturels (mais aucun entier strictement négatif) sont des valeurs infiniment répétées de (S_n).
12. Décrire précisément l'ensemble des valeurs infiniment répétées d'une suite qui n'est ni majorée ni minorée.

Problème

On rappelle qu'une homographie est une fonction définie par une expression de la forme $f : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, avec c **ou** d non nul (histoire que le dénominateur ne soit pas toujours nul). On va étudier dans ce problème quelques aspects des homographies, réelles comme complexes. Les trois parties de ce problème sont complètement indépendantes.

A. Un exemple d'homographie complexe.

On pose pour cette première partie $f(z) = \dfrac{iz+1+2i}{z-i}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ vers lui-même, et préciser l'expression de la réciproque de f.
2. Calculer la forme algébrique de $f(z)$.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$.
6. Représenter graphiquement dans un même repère les trois ensembles obtenus aux questions 3, 4 et 5.
7. Déterminer les point fixes de l'application f, qu'on notera désormais α et β (α étant la solution ayant la plus petite partie réelle).
8. Montrer que, $\forall z \neq \alpha$, $\dfrac{f(z)-\beta}{f(z)-\alpha} = \dfrac{z-\beta}{\alpha-z}$.
9. Montrer que l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z-\beta| = 2|z-\alpha|$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
10. Calculer l'image par f de ce cercle.

B. Suites homographiques réelles à unique point fixe.

On considère une suite réelle définie par une récurrence homographique : $u_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$. On note $P(x) = cx^2 + (d-a)x - b$. On suppose dans cette partie $ad - bc \neq 0$.

1. Montrer que les éventuelles racines du polynôme P sont les points fixes de la fonction f.
2. On suppose pour toute la suite de cette partie que P admet une racine double réelle, notée β. On a donc $P = c(x-\beta)^2$.
   Que peut-on dire de la suite (u_n) si $\alpha = \beta$?
3. On suppose désormais que $\alpha \neq \beta$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \beta$.
4. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n - \beta}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = c \times \dfrac{c\beta + d}{ad - bc}$.
5. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n (et de α, β et r).
6. La convergence de la suite (u_n) dépend-elle du choix de α ?

C. Quelques généralités sur les homographies complexes.

On note dans cette dernière partie $\overline{\mathbb{C}}$ l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (équivalent de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ pour les réels, mais avec un seul infini). Les homographies seront désormais définies sur $\overline{\mathbb{C}}$ (il n'y aura plus jamais de valeur interdite), et à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}$.

1. Quelle valeur logique peut-on donner à $f(\infty)$ (on distinguera deux cas selon les valeurs des coefficients a, b, c et d) ? On conviendra que $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$.
2. Avec les conventions précédentes, montrer que f est une bijection de $\overline{\mathbb{C}}$ dans lui-même, et que sa réciproque est également une homographie.
3. Montrer que la composée de deux homographies est toujours une homographie. En déduire que l'ensemble des homographies complexes est un sous-groupe du groupe de permutations de l'ensemble $\overline{\mathbb{C}}$.
4. On note désormais $\Omega = (\infty, 0, 1)$. Montrer que, quels que soient les trois éléments u, v, w distincts dans $\overline{\mathbb{C}}$, il existe une unique homographie f vérifiant $f(\Omega) = (u, v, w)$.
5. Soient $(u, v, w, z) \in \overline{\mathbb{C}}^4$, on appelle birapport du quadruplet (u, v, w, z) le nombre complexe $f(z)$, où f est l'unique homographie vérifiant $f(\Omega) = (u, v, w)$. On note ce birapport $[u, v, w, z]$.
   (a) Montrer que $[u, v, w, z] = \frac{\frac{w-u}{w-v}}{\frac{z-u}{z-v}}$.
   (b) Si on permute les variables u, v, w et z dans la définition du birapport, combien de valeurs différentes peut-on obtenir ? Exprimer ces valeurs en fonction de $[u, v, w, z]$.
   (c) Montrer que, si g est une homographie quelconque, alors $[g(u), g(v), g(w), g(z)] = [u, v, w, z]$.