Devoir Surveillé n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

23 novembre 2024

Exercice 1

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}i+j=\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}+j^2=\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n}j^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)(2n+1+1)}{4}=\frac{n(n+1)^2}{2}$.

2. On commence par effectuer notre pivot de Gauss tout à fait classiquement, avec pour la première étape les deux combinaisons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, qui donnent le système équivalent $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (\alpha+1)z = 1 \\ (\alpha-2)y + 4z = 1 \end{cases}$. On conclut le pivot avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (\alpha-2)L_2$ (opération toujours autorisée, puisque le coefficient qui peut s'annuler n'est pas associée à la ligne modifiée), et on trouve le système triangulaire équivalent suivant : $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (\alpha+1)z = 1 \\ (-\alpha^2+\alpha+6)z = 3-\alpha \end{cases}$. Le pivot ne peut pas être remonté normalement (et le système ne sera donc pas de Cramer) si $\alpha^2-\alpha-6=0$, équation de discriminant $\Delta = 1+24 = 25$ et admettant pour racines $\alpha_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $\alpha_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. On distingue donc trois cas :

   - si $\alpha = -2$, la dernière équation du système triangulaire devient $0 = 5$, ce qui est évidemment légèrement problématique. Le système est donc incompatible, et $\mathcal{S} = \emptyset$.
   - si $\alpha = 3$, cette même équation devient $0 = 0$, on peut l'éliminer. L'équation du milieu $y + 4z = 1$ permet d'exprimer y sous la forme $y = 1 - 4z$, et la première équation donne alors $x = 1 - y + z = 5z$, donc $\mathcal{S} = \{(5z, 1-4z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
   - enfin, dans le cas général, $z = \dfrac{3-\alpha}{-\alpha^2+\alpha+6} = \dfrac{3-\alpha}{-(\alpha+2)(\alpha-3)} = \dfrac{1}{\alpha+2}$, puis $y = 1-(\alpha+1)z = 1 - \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2} = \dfrac{1}{\alpha+2}$ (autrement dit, $z = y$) et enfin $x = 1-y+z = 1$. Il est temps de conclure : si $\alpha \notin \{-2, 3\}$, $\mathcal{S} = \left\{\left(1, \dfrac{1}{\alpha+2}, \dfrac{1}{\alpha+2}\right)\right\}$.

3. Le dénominateur ne peut pas se factoriser (il a un discriminant négatif), il faut donc faire apparaître une arctangente : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{x^2+2x+4}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{(x+1)^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan(1)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

4. Puisqu'on nous l'impose, faisons donc une récurrence. Au rang 1 qui est le rang initial imposé par l'énoncé, le membre de gauche de l'inégalité vaut $\binom{2}{1} = 2$, et celui de droite $\dfrac{4}{\sqrt{2+2}} = \dfrac{4}{2} = 2$, donc l'inégalité est vérifiée (et c'est même une égalité dans ce cas particulier). Supposons-là désormais vérifiée au rang n, et constatons que $\binom{2n+2}{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)\times(2n)!}{(n+1)^2\times(n!)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$. Ce facteur est donc celui permettant de passer du membre de gauche de l'inégalité au rang n, à celui de l'inégalité au rang $n+1$. À droite de ces mêmes inégalités, on va multiplier par un facteur égal à $\dfrac{4^{n+1}}{\sqrt{2n+4}} \times \dfrac{\sqrt{2n+2}}{4^n} = \dfrac{4\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$. Pour démontrer notre inégalité au rang $n+1$ à partir de l'hypothèse faite, il suffit donc de prouver que $\dfrac{2(2n+1)}{n+1} \leqslant \dfrac{4\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$ (l'inégalité sera « encore plus vraie qu'avant » si on a multiplié son membre de gauche par un facteur plus petit que celui de droite), soit en passant tout au numérateur (tout est positif) $(2n+1)\sqrt{n+2} \leqslant 2(n+1)\sqrt{n+1}$ (on a aussi simplifié par 2 en passant). Puisque tout est positif, cette inégalité est équivalente à $(2n+1)^2(n+2) \leqslant 4(n+1)^3$, soit en développant tout très brutalement $4n^3+12n^2+9n+2 \leqslant 4n^3+12n^2+12n+4$, ce qui est certainement vrai pour tout entier naturel (en simplifiant, il ne reste que la condition $3n+2 \geqslant 0$). Voila qui achève la preuve de l'hérédité, et donc la démonstration par récurrence de l'inégalité initiale.

5. On va bien sûr effectuer pour démarrer une petite décomposition en éléments simples : $\dfrac{3k+4}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$, où a, b et c sont trois constantes réelles. On les calcule par exemple à l'aide des magouilles habituelles : on multiplie par k et on pose $k=0$ pour obtenir $a = \dfrac{4}{2} = 2$; on multiplie par $k+1$ et on pose $k=-1$ pour obtenir $b=-1$; et on multiplie par $k+2$ avant de poser $k=-2$ pour obtenir $c = \dfrac{-2}{2} = -1$. Sans surprise, la somme des trois coefficients est nulle, ce qui va permettre de calculer la somme par télescopage : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \dfrac{1}{k} = 2+1+\left(\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \dfrac{1}{2} - \left(\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \dfrac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

6. On pose donc $x = \dfrac{1+\sin(t)}{3}$, d'où $2-3x = 2-1-\sin(t) = 1-\sin(t)$. Par ailleurs, $dx = \dfrac{\cos(t)}{3}\ dt$, et comme $\sin(t) = 3x-1$, on devra avoir $\sin(t) = -1$ pour obtenir la nouvelle borne du bas de notre intégrale, soit $t = -\dfrac{\pi}{2}$. Pour la borne du haut, on doit de même avoir $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$, donc $t = \dfrac{\pi}{6}$. Remarquons que, si on veut être très rigoureux, il faut dire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1+\sin(t)}{3}$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ pour avoir le droit de faire ce changement de variable.

Il est temps d'achever le calcul : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x(2-3x)}\ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{3}(1+\sin(t))(1-\sin(t))} \times \frac{1}{3}\cos(t)\ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\ dt$. Comme on est sur un intervalle d'intégration où le cosinus est positif, on peut écrire $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$, donc notre intégrale vaut $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3\sqrt{3}}\cos^2(t)\, dt$. On rappelle que, via formules de duplication, $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, donc $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$. On peut enfin finir le calcul de notre intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{6\sqrt{3}}(1+\cos(2t))\, dt = \frac{1}{6\sqrt{3}}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{12\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{24}$.

7. Pour une fois, on est obligés de mettre le « mauvais indice » dans la somme intérieure pour pouvoir faire le calcul : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant i\leqslant n}\binom{n}{k}2^i = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}2^i = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}2^{i+k} = \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}2^i = \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}\times\frac{1-2^{n-k+1}}{1-2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2^{n+1}-2^k) = 2^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k} = 2^{n+1}\times 2^n - 3^n = 2^{2n+1} - 3^n$ (on a bien sûr appliqué le binôme de Newton en fin de calcul, ainsi que la formule bien connue pour la somme des coefficients binômiaux).

8. Commençons par remarquer qu'aucune des inconnues ne peut prendre la valeur 0, mais aussi qu'aucune ne peut prendre une valeur strictement négative. En effet, si $x < 0$, la deuxième équation impose $y < 0$ et la troisième impose $z < 0$, mais alors la première équation ne peut pas être vérifiée. Si $y < 0$, x doit être négatif (équation 2), et z aussi (équation 3), qui est toujours impossible. Enfin, si $z < 0$, x aussi (équation 3) puis y (équation 2), encore et toujours impossible. Puisque tout est strictement positif, on peut passer au ln pour obtenir un système équivalent. Tant qu'à faire, on va noter $a = \ln(x)$, $b = \ln(y)$ et $c = \ln(z)$ pour simplifier l'écriture : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & + & 2c & = & \ln(2) \\ a & + & 2b & + & 3c & = & \ln(3) \end{array}\right.$. On effectue les combinaisons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ pour obtenir directement un système triangulaire : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & \ln(2) \\ & & b & + & 2c & = & \ln(3) \end{array}\right.$. Il ne reste plus qu'à remonter : $c = \ln(2)$ donc $z = e^c = 2$, $b = \ln(3) - 2\ln(2)$ donc $y = e^b = \dfrac{3}{4}$, et $a = -b - c = \ln(2) - \ln(3)$ donc $c = e^a = \dfrac{2}{3}$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, 2\right)\right\}$.

9. On va effectuer une récurrence double pour démontrer la formule. Au rang $n = 0$, la formule prétend que $u_0 = 2^0 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Au rang $n = 1$, elle prétend que $u_1 = 2^1 \times \dfrac{3}{2} = 3$, ce qui est aussi vrai. Notre double initialisation est donc vérifiée. On peut alors supposer, pour un certain entier naturel n, que $u_n = 2^n\left(1 + \dfrac{n}{2}\right)$ **et** que $u_{n+1} = 2^{n+1}\left(1 + \dfrac{n+1}{2}\right)$. On calcule alors $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n = 2^{n+3}\times\dfrac{n+3}{2} - 2^{n+2}\times\dfrac{n+2}{2} = 2^{n+2}(n+3) - 2^{n+1}(n+2) = 2^{n+1}\times n + 2\times 2^{n+2} = 2^{n+2}\times\left(\dfrac{n}{2} + 2\right) = 2^{n+2}\left(1 + \dfrac{n+2}{2}\right)$, ce qui est bien la formule attendue au rang $n+2$. On a donc bien prouvé l'hérédité de notre récurrence double, la formule est vraie pour tout entier naturel.

10. Bon, ok, je l'avoue, il y a eu une erreur de recopie dans l'énoncé de cette question, qui ne se calcule pas du tout sous la forme donnée. L'énoncé aurait du être le suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k^2} + 1} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^2 + (k+1)^2 + k^2(k+1)^2}{k^2(k+1)^2}} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2}} =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}$. On peut écrire le contenu de cette dernière somme sous la forme $1+\dfrac{1}{k(k+1)}=1+\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ (décomposition en éléments simples facile), donc notre somme est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=n+1-\frac{1}{n+1}$ (télescopage entre les deux derniers termes).

11. L'équation différentielle homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+r-2=0$, de discriminant $\Delta=1+8=9$, les racines en sont donc $r_1=\dfrac{-1-3}{2}=-2$ et $r_2=\dfrac{-1+3}{2}=1$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $y_h : x\mapsto Ae^{-2x}+Be^{x}$, avec $(A,B)\in\mathbb{R}$. Comme 1 est racine de l'équation caractéristique, on chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x)=(ax^2+bx)e^x$, ce qui donne $y_p'(x)=(2ax+b+ax^2+bx)e^x$, puis $y_p''(x)=(2a+b+2ax+2ax+bx+b+ax^2)e^x$. En réintégrant tout dans l'équation et en simplifiant par e^x, on obtient $ax^2+(4a+b)x+2a+2b+ax^2+(2a+b)x+b-2ax^2-2bx=x$, soit $6ax+2a+3b=x$. On choisit donc $a=\dfrac{1}{6}$ puis $b=-\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{1}{9}$, soit $y_p(x)=\left(\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{9}x\right)e^x$. Finalement, les solutions de notre équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme $y : x\mapsto\left(\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{9}x+B\right)e^x+Ae^{-2x}$, avec $(A,B)\in\mathbb{R}$.

   Pour avoir une solution ayant une limite finie en $-\infty$, il faut imposer $A=0$ (tout le reste tend vers 0 en exploitant les croissances comparées, il faut donc que le terme Ae^{-2x} ne tende **pas** vers un infini). De plus, $y(0)=B+A$, donc avec $A=0$, la condition $y(0)=1$ impose $B=1$. L'unique solution cherchée est donc définie par $y(x)=\left(\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{9}x+1\right)e^x$.

Exercice 2

1. Calulons donc : $S_1\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(\frac{1}{2})^1}{1}=\dfrac{1}{2}$, puis $S_2\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{(\frac{1}{2})^2}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$, $S_3\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{8}+\dfrac{\frac{1}{8}}{3}=\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$, et enfin $S_4\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\frac{1}{16}}{4}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{131}{192}$. Palpitant.
2. C'est une somme géométrique tout ce qu'il y a de plus classique, mais attention, il manque le terme d'indice 0 (qui est égal à 1) pour pouvoir appliquer directement la formule vue en cours : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$. Remarquons que ce quotient est inférieur à $\dfrac{x}{1-x}$ (le dénominateur étant positif). Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ de façon évidente (chaque terme de la somme de gauche est plus grand que son homologue dans la somme de droite), la majoration demandée en découle immédiatement.
3. La suite $(S_n(x))$ est trivialement croissante (à chaque nouveau calcul, on ajoute à la somme déjà calculée un nouveau terme positif, cf les calculs effectués à la toute première question), et on vient de prouver que la suite est majorée par une constante indépendante de n. Elle est donc convergente, et bien sûr, vu la majoration donnée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(x)\leqslant\frac{x}{1-x}$. En particulier, lorsque $x=\dfrac{1}{2}$, la limite de la suite est inférieure à 1.
4. On a déjà $I_n(x)\geqslant 0$ puisqu'on calcule l'intégrale d'une fonction positive. De plus, par une majoration bien peu subtile, $I_n(x)\leqslant\displaystyle\int_0^x\frac{x^n}{1-t}\,dt$ (les fonctions puissances sont croissantes

sur $[0,1]$, donc sur $[0,x]$, on peut donc sûrement majorer t^n par la constante x^n sur cet intervalle), d'où $I_n(x) \leqslant [-x^n \ln(1-t)]_0^x = -x^n \ln(1-x)$ (valeur qui est bien positive puisque $\ln(1-x) < 0$). On a donc prouvé que $0 \leqslant I_n(x) \leqslant -x^n \ln(1-x)$, avec un majorant qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ (rappelons qu'on a toujours $x \in]0,1[$). C'est donc le théorème des gendarmes qui permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = 0$.

5. En effet, $\displaystyle\int_0^x t^{k-1}\,dt = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \frac{x^k}{k}$. On en déduit (par linéarité de l'intégrale, et modulo un léger décalage d'indice) que $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \int_0^x t^{k-1}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - I_n(x)$. Il ne reste plus qu'à calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x)$ (ce qu'on a déjà fait à la question précédente) pour conclure.

   Un passage à la limite donne alors immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = -\ln(1-x)$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$. On sait tous depuis la maternelle que $\ln(2) \simeq 0.69$. Or, on a calculé plus haut que $S_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{131}{192} \simeq 0.68$ (si on n'est pas assez courageux pour faire la division euclidienne à la main pour obtenir cette valeur approchée, on part de la valeur précédente $\frac{2}{3} \simeq 0.67$ et on lui ajoute une valeur supérieure à 0.01 pour passer à S_4, ce qui suffit à obtenir cette valeur approchée au centième près). Il n'y a pas de définition précise de ce qu'est une « bonne » valeur approchée, mais on est déjà proche de la limite.

6. Comme on est trop paresseux pour faire une décomposition en éléments simples, on écrit directement $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{k+1-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, donc $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} - \frac{x^k}{k+1} = S_n(x) - \frac{1}{x}\sum_{k=1}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} = S_n(x) - \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k} = S_n(x) - \frac{S_{n+1}(x) - x}{x}$ (il manque le premier terme dans la somme de droite pour reconnaître $S_{n+1}(x)$).

7. On peut donc écrire $T_n\left(\frac{1}{2}\right) = S_n\left(\frac{1}{2}\right) - 2S_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) + 1$. En particulier, pusiqu'on connaît déjà la limite de $S_n(x)$, on voit facilement que $T_n(x)$ converge vers $1 - \ln(2) \simeq 0.31$. Calculons alors (directement, ça ira aussi vite qu'en exploitant le lien avec S_n) $T_3\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} + \dfrac{\frac{1}{4}}{6} + \dfrac{\frac{1}{8}}{12} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{96} = \dfrac{29}{96} \simeq 0.30$. Là aussi, on est déjà très proche de la limite.

Exercice 3

1. Le dénominateur de la fraction peut se factoriser sous la forme $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$, on aura donc une décomposition de la forme $\dfrac{3x^2+1}{x^3-x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On utilise la méthode habituelle pour obtenir les constantes : multiplication par x puis $x = 0$ pour trouver $-1 = a$, on multiplie par $x-1$ et on pose $x = 1$ pour trouver $b = 2$, et on multiplie par $x+1$ avant de poser $x = -1$ pour le dernier coefficient $c = 2$. Il ne reste plus qu'à conclure : $\dfrac{3x^2+1}{x^3-x} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{2}{x+1}$.

2. Une fonction affine ayant une dérivée seconde nulle, on chercher une fonction vérifiant $(x+1)y' - y = 0$. On peut bien sûr s'embêter à poser $y(x) = ax + b$, mais ce n'est pas vraiment nécessaire : $f_0(x) = x + 1$ convient de façon évidente.

3. On pose $y(x) = (x+1)z(x)$, donc $y'(x) = z(x)+(x+1)z'(x)$, puis $y''(x) = 2z'(x)+(x+1)z''(x)$. On injecte tout ça dans l'équation de départ : $2(x^2-x)z'(x)+(x^2-x)(x+1)z''(x)+(x+1)z(x)+(x+1)^2z'(x)-(x+1)z(x) = 0$, soit $(x^3-x)z''(x)+(3x^2+1)z'(x) = 0$. La fonction z' est donc bien solution de l'équation du premier ordre (E_1) (en notant $w = z'$) : $(x^3-x)w'+(3x^2+1)w = 0$.

4. Tiens, c'est surprenant, les calculs de la la première question vont servir ! D'après la décomposition en éléments simples effectuée plus haut, la fonction $x \mapsto \dfrac{3x^2+1}{x^3-x}$ admet pour primitive $x \mapsto -\ln(x)+2\ln(x-1)+2\ln(x+1)$ (on rappelle qu'on résout sur $]1,+\infty[$ où tout ce qui se trouve dans nos ln est bien positif). Les solution de l'équation (E_1), qui est homogène, sont donc de la forme $w(x) = Ke^{\ln(x)-2\ln(x-1)-2\ln(x+1)} = K\dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)^2} = \dfrac{Kx}{(x^2-1)^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

5. Puisqu'on a obtenu une expression de $w = z'$, il convient de commencer par en calculer les primitives (**toutes** les primitives, vien entendu). On reconnaît dans $\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$ quasiment une forme $\dfrac{u}{u^2}$. Quitte à diviser la constante par 2 (on la nommera désormais A et plus K), les fonctionc convenables pour z sont donc toutes celles de la forme $\dfrac{A}{x^2-1}+B$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Il ne reste plus qu'à remonter le changement d'inconnue initial : les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = (x+1)z(x) = \dfrac{A}{x-1}+B(x+1)$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}$.

6. Avec les notations précédentes, la condition $y(2) = -1$ impose $A+3B = -1$. De plus, $y'(x) = -\dfrac{A}{(x-1)^2}+B$, donc la deuxième condition $y'(2) = -3$ impose $-A+B = -3$. La somme des deux équations donne immédiatement $4B = -4$, donc $B = -1$, puis $A = 2$. Finalement, $y(x) = \dfrac{2}{x-1}-x-1$.