Devoir Surveillé n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

23 novembre 2024

Exercice 1

Les calculs demandés dans cet exercice sont tous indépendants les uns des autres.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)$ (on donnera le résultat sous la forme la plus factorisée possible).
2. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & \alpha z & = & 2 \\ 2x & + & \alpha y & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$ en distinguant si besoin des cas particuliers selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx$.
4. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{2n+2}}$.
5. Calculer $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+4}{k(k+1)(k+2)}$.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x(2-3x)}\, dx$ en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{1+\sin(t)}{3}$.
7. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} \binom{n}{k} 2^i$.
8. Résoudre le système suivant $\left\{\begin{array}{rcl} xyz & = & 1 \\ xyz^2 & = & 2 \\ xy^2z^3 & = & 3 \end{array}\right.$ (appliquer une fonction usuelle bien connue aux équations du système est une bonne idée).
9. Une suite (u_n) est définie par les conditions suivantes : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n \left(1 + \dfrac{n}{2}\right)$.
10. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} + 1}$.
11. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = xe^x$ vérifiant $y(0) = 1$ et admettant une limite finie en $-\infty$.

Exercice 2

Soit $x \in]0,1[$ (hypothèse valable tout au long de l'exercice). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.

1. Calculer les valeurs de $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ et $S_4(x)$ lorsque $x = \frac{1}{2}$.
2. Calculer la valeur de $\sum_{k=1}^{n} x^k$, puis montrer que $S_n(x) \leqslant \frac{x}{1-x}$.
3. Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge (on rappelle le théorème de convergence monotone : toute suite croissante majorée, ou décroissante minorée, est convergente), et donner un majorant de sa limite lorsque $x = \frac{1}{2}$.
4. On pose désormais $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$. Montrer que la suite $(I_n(x))$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que $S_n(x) = -\ln(1-x) - I_n(x)$ (on pourra partir du fait que $\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}\, dt$), en déduire la limite de la suite $(I_n(x))$. On donnera en particulier la valeur de cette limite lorsque $x = \frac{1}{2}$. La valeur de $S_4\left(\frac{1}{2}\right)$ calculée plus haut est-elle une bonne valeur approchée de cette limite ?
6. On pose enfin $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k(k+1)}$. Montrer que $T_n(x) = S_n(x) - \frac{S_{n+1}(x) - x}{x}$.
7. En déduire la limite de la suite $\left(T_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Comparer cette valeur à celle de $T_3\left(\frac{1}{2}\right)$ (qu'il faudra donc calculer au préalable).

Exercice 3

On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation différentielle homogène du second ordre (E) : $(x^2 - x)y'' + (x+1)y' - y = 0$, uniquement sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

1. Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{3x^2+1}{x^3-x}$ (et si ça ne vous sert à rien dans toute la suite de l'exercice, posez-vous des questions).
2. Déterminer une fonction affine solution de l'équation (E). On note f_0 la fonction trouvée.
3. On pose désormais $z(x) = \frac{y(x)}{f_0(x)}$. Montrer que y est solution de l'équation (E) si et seulement si z' est solution d'une équation du premier ordre (E_1) que l'on précisera.
4. Résoudre l'équation (E_1).
5. En déduire les solutions de l'équation (E).
6. Déterminer la solution du problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et des conditions initiales $y(2) = -1$ et $y'(2) = -3$.