Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

9 novembre 2024

Exercice 1

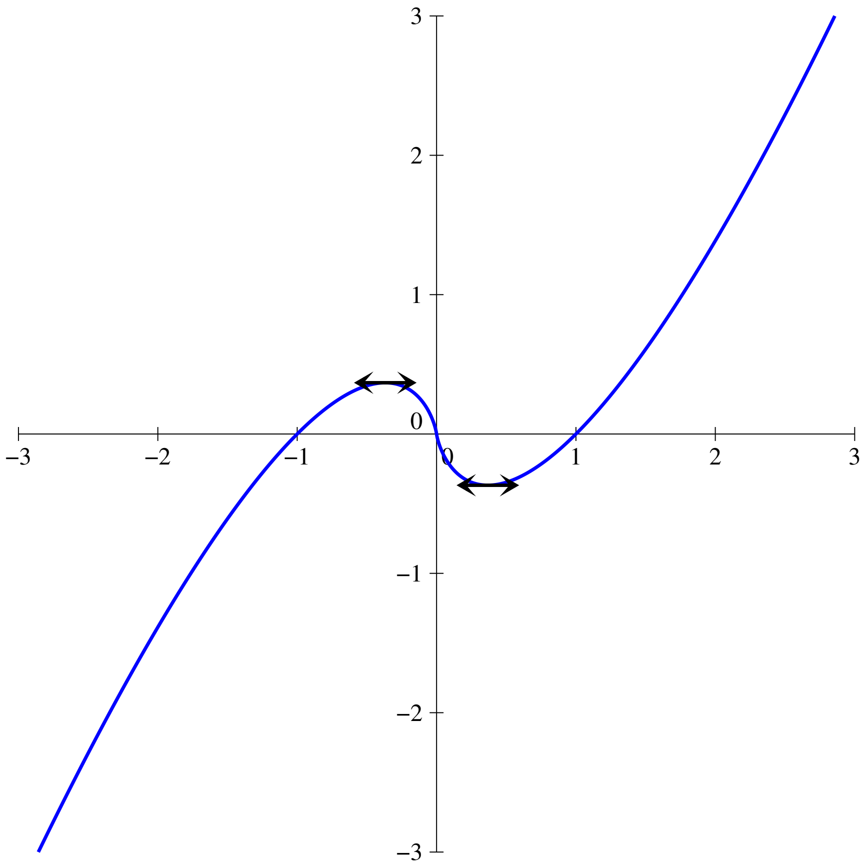
1. Commençons par poser $x = y = 0$. L'équation donne alors $f(0) = 0 \times f(0) + 0 \times f(0)$, donc $f(0) = 0$. Posons ensuite $x = y = 1$ pour obtenir $f(1) = f(1) + f(1)$, donc $f(1) = 2f(1)$, ce qui impose évidemment $f(1) = 0$. Enfin, posons $x = y = -1$, ce qui donne cette fois-ci $f(1) = -f(-1) - f(-1)$, donc $2f(-1) = f(1) = 0$, puis $f(-1) = 0$. Les trois valeurs demandées sont donc nécessairement nulles.
2. Gardons x quelconque dans l'équation fonctionnelle et posons $y = -1$: $f(-x) = xf(-1) - f(x)$. Puisqu'on a déjà prouvé que $f(-1) = 0$, on en déduit $f(-x) = -f(x)$, et f est donc impaire.
3. Puisque f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on peut fixer $x > 0$ et dériver par rapport à y l'équation fonctionnelle, pour obtenir $xf'(xy) = xf'(y) + f(x)$. On pose alors $y = 1$, et on trouve $xf'(x) - f(x) = xf'(1)$, équation valable sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$. On pose $k = f'(1)$ (valeur qu'on ne connaît pas pour l'instant) et on a la forme demandée par l'énoncé.
4. On est en présence d'une équation linéaire de premier ordre. Les solutions de l'équation homogène normalisée associée $y' - \frac{1}{x}y = 0$ sont les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{\ln(x)} = Kx$, avec $K \in \mathbb{R}$ (la constante K n'a rien à voir avec le $k = f'(1)$ défini juste avant). Reste à trouver une solution particulière de l'équation normalisée $y' - \frac{1}{x}y = k$, qu'on va chercher par variation de la constante sous la forme $y_p(x) = xK(x)$. On aura alors $y_p'(x) = K(x) + xK'(x)$, donc y_p est solution si $K(x) + xK'(x) - \frac{1}{x} \times xK(x) = k$, soit $xK'(x) = k$, donc $K'(x) = \frac{k}{x}$. On peut choisir $K(x) = k\ln(x)$, donc $y_p(x) = kx\ln(x)$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $y : x \mapsto kx\ln(x) + Kx$, avec k et K qui sont deux constantes réelles a priori indépendantes.

   Revenons maintenant au problème posé : d'après les calculs précédents, on doit avoir $f(x) = kx\ln(x) + Kx$, avec $k = f'(1)$. Or, avec la formule imposée, on aura $f'(x) = k\ln(x) + k + K$, donc $f'(1) = k + K$, ce qui impose donc $K = 0$ pour avoir $k = f'(1)$. Finalement, on doit donc avoir $f(x) = kx\ln(x)$, mais on n'est toujours pas sûrs que **toutes** les fonctions de cette forme soient solutions, puisqu'on a procédé par condition nécessaire (la dérivation effectuée en cours de route n'est pas une équivalence). Vérifions donc : si $f(x) = kx\ln(x)$, alors $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $f(xy) = kxy\ln(xy) = kxy\ln(x) + kxy\ln(y) = x \times ky\ln(y) + y \times kx\ln(x) = xf(y) + yf(x)$, donc f vérifie bien l'équation fonctionnelle, du moins sur $]0, +\infty[$. Sur $]-\infty, 0[$, on est obligés de respecter le fait que f est impaire, on impose donc $f(x) = kx\ln(-x)$ quand $x < 0$, et l'équation fonctionnelle restera vérifée (même calcul que ci-dessus). Enfin, on doit avoir $f(0) = 0$, et là encore ça ne peut pas perturber la vérification de l'équation fonctionnelle. Finalement, toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = kx\ln(|x|)$ et prolongées en 0 en posant $f(0) = 0$ sont solutions de l'équation fonctionnelle.
5. Si on impose $f(e) = e$, on doit avoir $ke\ln(e) = e$, donc $k = 1$. Il y a bien une unique fonction solution, définie par $f(x) = x\ln(|x|)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. La fonction f est continue

en 0 (par croissance comparée, $\lim_{x \to 0} x \ln(|x|) = 0$). On a sans difficulté $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (ce qui est aussi confirmé par la parité de f). Sur $]0, +\infty[$, f est dérivable et $f'(x) = \ln(x) + 1$, donc f est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$, admettant pour minimum $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. On complète le tableau de variations par parité :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f		$\frac{1}{e}$			$+\infty$
	$\nearrow$		$\searrow$ 0 $\searrow$		$\nearrow$
	$-\infty$			$-\frac{1}{e}$	

Avant de tracer la courbe, on peut signaler que $f(-1) = f(1) = 0$:



Exercice 2

1. Allons-y pour des calculs niveau Maths Sup (maternelle supérieure) : $S_0 = 1$, $S_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $S_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$, et $S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{13}{15} - \frac{1}{7} = \frac{76}{105}$. La suite n'est évidemment pas monotone puisqu'on ajoute alternativement des termes positifs (pour obtenir une valeur plus grande que la précédente) et négatifs (pour obtenir une valeur plus petite). Si la suite converge, c'est logiquement vers une valeur comprise entre deux termes successifs de la suite (on pourrait même le démontrer assez facilement). Avec les calculs déjà effectués, la limite appartient donc à l'intervalle $\left[\frac{76}{105}, \frac{13}{15}\right]$. Si on est plus paresseux (l'énoncé a dit de

ne pas être précis, après tout), elle est dans $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

2. Tout le monde sait, bien entendu, que $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$. Ici, c'est plutôt la deuxième version qui va nous être utile, puisque la fonction $\tan^2$ est donc la dérivée de $x \mapsto \tan(x) - x$. On en déduit $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\ dx = [\tan(x) - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$.
3. En effet, $I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) + \tan^4(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(x)) \tan^2(x)\ dx$. On reconnaît sous l'intégrale une forme $u'u^2$ qui est la dérivée de $\frac{u^3}{3}$, donc $I_1 + I_2 = \left[\frac{\tan^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}$. On en déduit $I_2 = \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$.
4. C'est exactement le même principe que ci-dessus : $I_n + I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x) + \tan^{2n+2}(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(x)) \tan^{2n}(x)\ dx = \left[\frac{\tan^{2n+1}(x)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+1}$.
5. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \tan^{2n+2}(x) \leqslant \tan^{2n}(x)$ (les puissances sont de plus en plus petites sur l'intervalle $[0, 1]$) puis en intégrant les inégalités $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite est donc décroissante.
6. On a déjà signalé l'inégalité $0 \leqslant I_{n+1}$ ci-dessus. De plus, d'après la décroissance de la suite, $2I_{n+1} \leqslant I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, donc $I_{n+1} \leqslant \frac{1}{4n+2}$. On en déduit (en décalant la valeur de n) que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{4n-2}$. Une application directe du théorème des gendarmes prouve alors que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
7. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{n+1}$. Pour $n = 0$, $\frac{\pi}{4} + (-1)^0 I_1 = \frac{\pi}{4} + I_1 = 1$, ce qui est bien la valeur de S_1, donc P_0 est vraie. Supposons la formule vraie au rang n, alors, en utilisant le fait que $I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{2n+3}$, on peut écrire $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{n+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \times \frac{1}{2n+3} - (-1)^n I_{n+2}$, soit $S_n + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} I_{2n+2}$, ce qui est exactement la propriété P_{n+1}, puisque $S_n + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} = S_{n+1}$. On a donc prouvé l'hérédité de notre récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.
8. Puisque I_n tend vers 0, on a immédiatement $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$. De la formule précédente découle que $\pi = 4S_n \pm 4I_{n+1}$, avec $4I_{n+1} \leqslant \frac{4}{4n+2} < \frac{1}{n}$. La valeur de $4S_n$ est donc une valeur approchée de π à $\frac{1}{n}$ près, ce qui prouve qu'il suffit de calculer $4S_{1\ 000}$ pour avoir notre valeur approchée à 10^{-3} près. Il faudrait quand même une grosse motivation pour le faire en pratique, mais Wolfram donne $S_{1\ 000} \simeq 3.1426$. Wolfram donne aussi la fraction exacte correspondante, mais vu le nombre de chiffres du numérateur et du dénominateur, je vais vraiment éviter de la recopier !

Exercice 3

1. (a) Puisque $y(x) = z(\ln(x))$, on peut dériver deux fois pour obtenir $y'(x)\frac{1}{x}z'(\ln(x))$, puis $y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. En reportant dans l'équation initiale, (E) est donc

équivalente à $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = x$. Autrement dit, $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^t$, puisque $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$.

(b) L'équation caractéristique associée à l'équation obtenue est $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui peut directement se factoriser sous la forme $(r-1)^2 = 0$ et a donc pour racine double $r_0 = 1$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc de la forme $z_h(t) = (A + Bt)e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Le second membre de notre équation étant une exponentielle qui a le très mauvais goût d'être exactement celle correspondant à notre racine double, on va chercher une solution particulière de la forme $z_p(t) = at^2e^t$ (on augmente le degré de deux, ou plutôt on décale de deux pour ne pas faire de calcul inutile, ceux qui auront dérivé deux fois du $(at^2 + bt + c)e^t$ auront fait des calculs inutiles). On aura alors $z_p'(t) = 2ate^t + at^2e^t = (2at + at^2)e^t$, puis $z_p''(t) = (2a + 2at)e^t + (2at + at^2)e^t = (2a + 4at + at^2)e^t$. Quitte à tout simplifier par e^t (qui ne s'annule jamais), z_p est solution de l'équation si $2a + 4at + at^2 - 4at - 2at^2 + at^2 = 1$, donc si $2a = 1$ (il est normal que tout le reste se simplifie). On peut donc poser $z_p(t) = \frac{1}{2}t^2e^t$, et toutes les solutions de notre équation complète sont les fonctions de la forme $z : t \mapsto \left(\frac{1}{2}t^2 + A + Bt\right)e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Il suffit de remonter le changement de variable (on a procédé par équivalences, pas de vérification à faire) : $y(x) = z(\ln(x)) = \left(\frac{1}{2}\ln^2(x) + A + B\ln(x)\right)x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. (a) Puisqu'on a posé $y(x) = xw(x)$, on aura $y'(x) = w(x) + xw'(x)$, puis $y''(x) = w'(x) + w'(x) + xw''(x) = 2w'(x) + xw''(x)$. On remplace dans l'équation $(E) : 2x^2w'(x) + x^3w''(x) - xw(x) - x^2w'(x) + xw(x) = x$. On a le droit de tout simplifier par x (puisqu'on résout sur $]0, +\infty[$) pour en déduire que $x^2w''(x) + xw'(x) = 1$, c'est-à-dire exactement l'équation demandée en posant $v = w'$.

(b) L'équation normalisée s'écrit $v' + \frac{1}{x}v = \frac{1}{x^2}$. L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions $v_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \frac{K}{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Pour déterminer une solution particulière, on va appliquer la méthode de variation de la constante en la cherchant sous la forme $v_p(x) = \frac{K(x)}{x}$. On a alors $v_p'(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$, donc v_p est solution si $\frac{xK'(x) - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, donc si $K'(x) = \frac{1}{x}$. On peut donc choisir $K(x) = \ln(x)$, et $v_p(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Les solutions de l'équation complète sont donc toutes les fonctions de la forme $v : x \mapsto \frac{K + \ln(x)}{x}$.

Puisqu'on a posé $v = w'$, il faut calculer toutes les primitives des solutions qu'on vient d'obtenir. On remarque que $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$ (en posant $u(x) = \ln(x)$) et admet donc pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2(x)$. Les primitives recherchées sont donc les fonctions de la forme $w : x \mapsto K\ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x) + L$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$. Il ne reste plus qu'à remonter le changement d'inconnue initial : $y(x) = xw(x) = \left(K\ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x) + L\right)x$, ce qui correspond bien entendu aux formules trouvées par la première méthode.

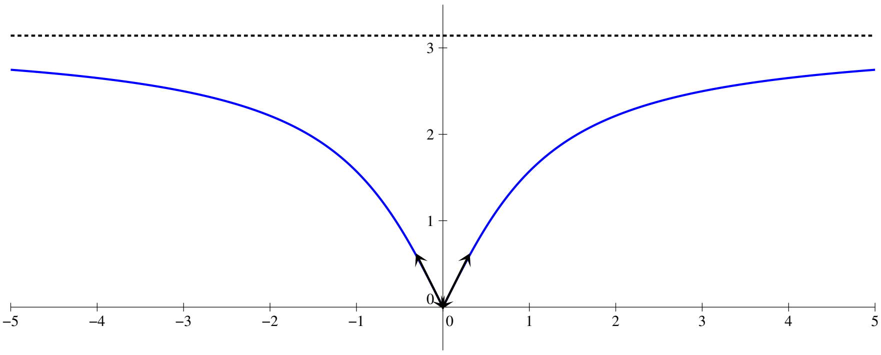
(c) Avec les notations de cette question, $y(1) = 1$ si $L = 1$, donc $y(x) = \left(K\ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x) + 1\right)x$. On dérive : $y'(x) = \left(\frac{K}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right) \times x + K\ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x) + 1$, donc $y'(1) = K + 1$. La condition $y'(1) = -1$ impose donc $K = -2$, puis $y(x) = x\left(\frac{1}{2}\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1\right)$.

Exercice 4

1. La fraction à l'intérieur du arccos est définie sur $\mathbb{R}$ puisque son dénominateur ne s'annule jamais. Mais pour que f soit définie, il faut en plus vérifier si $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1,1]$. Si $x \in [-1,1]$, on a $0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1+x^2$, donc $0 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$, ce qui prouve que f est définie sur $[-1,1]$. Et si $x \notin [-1,1]$, on peut écrire $0 \leqslant x^2-1 \leqslant x^2+1$, donc $-1-x^2 \leqslant 1-x^2 \leqslant 0$, ce qui implique $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 0$, et f est à nouveau définie. Finalement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Pour que f soit dérivable, il ne faut pas que ce qui se trouve à l'intérieur du arccos soit égal à -1 ou 1 (on rappelle que arccos n'est dérivable que sur $]-1,1[$). Or, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = -1 \Leftrightarrow 1-x^2 = -1-x^2$, ce qui ne se produit jamais. Et $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow 1-x^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 0$, donc la seule valeur problématique est $x=0$, et f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
2. Ce qui se trouve dans le arccos est pair, donc f est paire.
3. Histoire de réviser les valeurs remarquables en trigo : $f(0) = \arccos(1) = 0$, $f(1) = \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arccos\left(\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
4. Pour résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$, on peut composer par cos pour obtenir l'équation équivalente (ici, on sait que les deux angles dont on compare les cosinus appartiennent à l'intervalle $[0,\pi]$ sur lequel la fonction cos est bijective) $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit $2-2x^2 = \sqrt{2}+\sqrt{2}x^2$, ou encore $2-\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})x^2$. On en déduit que $x^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$, donc $x = \pm\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm(\sqrt{2}-1)$. On procède de même pour les antécédents de $\dfrac{3\pi}{4}$: $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $2-2x^2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}x^2$, ce qui donne $x^2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{(2+\sqrt{2})^2}{2}$, puis $x = \pm(\sqrt{2}+1)$.
5. En conservant le quotient des termes de plus haut degré, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = -1$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$.
6. Commençons par poser $u(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, et calculons $u'(x) = \dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$, puis dérivons f sur $]0,+\infty[$: $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)\sqrt{1+2x^2+x^4-1+2x^2+x^4}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} = \dfrac{2}{1+x^2}$ (notons tout de même que la dernière simplification n'est valable que sur $]0,+\infty[$, sinon on aurait $\sqrt{x^2} = -x$ et la formule serait l'opposée de celle obtenue). Cette dérivée est clairement positive sur $]0,+\infty[$, donc f y est croissante. La fonction f étant paire, elle est décroissante sur $]-\infty,0[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π

7. On a bien sûr remarqué que $\forall x > 0$, $f'(x) = 2\arctan'(x)$. On peut en déduire qu'il existe une constante K telle que $f(x) = 2\arctan(x) + K$ sur $]0, +\infty[$. En posant $x = 1$, on doit avoir $f(1) = 2\arctan(1) + K = \dfrac{\pi}{2} + K$, ce qui impose $K = 0$ puisque $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$. On a donc simplement $f(x) = 2\arctan(x)$ sur $]0, +\infty[$. La parité de f et l'imparité de arctan imposent alors $f(x) = -2\arctan(x)$ sur $]-\infty, 0[$ (sinon, on peut aussi procéder comme sur $]0, +\infty[$ en partant de l'expression de f').
8. Un calcul trivial donne $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 2$. La symétrie de la courbe de f par rapport à l'axe des ordonnées, qui implique celle de ses tangentes en x et en $-x$ par rapport à ce même axe, impose alors $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -2$. Ces valeurs confirment que f n'est pas du tout dérivable en 0, on aura à l'origine du repère une « pointe », avec une pente -2 à gauche de 0 et une pente 2 à droite de 0.
9. Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = \pi$ (valable des deux côtés), et les seules tangentes remarquables sont les deux demi-tangentes en 0 signalées à la question précédente. Pour obtenir une courbe soignée, on peut exploiter les quelques valeurs calculées en cours de route, notamment $f(1) = f(-1) = \dfrac{\pi}{2}$, et bien sûr le fait que la courbe est facilement obtenue à partir de celle de la fonction arctan vu les formules trouvées en question 7 :



10. On sait bien sûr que $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$, donc $\dfrac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} = \cos^2(\theta)(1 - \tan^2(\theta)) = \cos^2(\theta) \times \left(1 - \dfrac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$ puisqu'on reconnaît une des formes de la formule de duplication des cosinus. Notons que la formule est en fait valable sur tous les intervalles où la tangente est définie.
11. Le changement de variable est toujours possible puisqu'il suffit de poser $\theta = \arctan(x)$, ce qui est possible pour tout réel x. On calcule donc $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}\right) = \arccos(\cos(2\theta))$. On ne peut simplifier sans réfléchir que si $2\theta \in [0, \pi]$, donc si $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ce qui sera le cas si $x \geqslant 0$. Sous cette condition, on a bien $f(x) = 2\theta = 2\arctan(x)$. Par contre, si $x < 0$, alors $2\theta \in [-\pi, 0]$, donc $\arccos(\cos(2\theta)) = \arccos(\cos(-2\theta)) = -2\theta = -2\arctan(x)$, ce qui est conforme aux formules de la question 7.