Devoir Surveillé n° 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

5 octobre 2024

Exercice 1

1. On remplace les fonctions hyperboliques par leurs expressions explicites avec des exponentielles : $e^x + e^{-x} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \geqslant 2 \Leftrightarrow e^x + 3e^{-x} - 4 \geqslant 0$. On effectue maintenant le changement de variable $X = e^x$ pour se ramener (quitte à tout multiplier par e^x à l'inéquation du second degré $X^2 - 4X + 3 \geqslant 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $X_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. L'inéquation est donc vérifiée si $X \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$, ce qui se traduit en remontant le changement de variable par $\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup [\ln(3), +\infty[$.
2. Cette équation du troisième degré admet pour solution évidente $x = 1$ (puisque $1-2-11+12 = 0$), on peut donc factoriser son membre de gauche sous la forme $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Une identification des coefficients donne les conditions $a = 1$, $b - 1 = -2$ qui implique $b = -1$, et $c - b = -11$ qui donne $c = -12$, cohérent avec le coefficient constant. Le deuxième facteur obtenu $x^2 - x - 12$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 48 = 49$ et pour racines $x_1 = \dfrac{1-7}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{1+7}{2} = 4$. On conclut aisément : $\mathcal{S} = \{-3, 1, 4\}$.
3. Cette inéquation ne peut avoir de sens que si $1 - x \geqslant 0$, soit $x \leqslant 1$. On peut l'écrire sous la forme $3\sqrt{1-x} \leqslant 3 - x$, et comme le second membre de l'inégalité est toujours positif sur notre intervalle de résolution, on peut élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalent $9(1-x) \leqslant (3-x)^2$, soit $9 - 9x \leqslant 9 - 6x + x^2$, ou encore $x^2 + 3x \geqslant 0$. Le membre de gauche a pour racines -3 et 0, il est positif à l'extérieur de ces racines, d'où $\mathcal{S} =]-\infty, -3] \cup [0, 1]$.
4. Comme on peut écrire le 9^x sous la forme $3^{2x} = (3^x)^2$, un changement de variable $X = 3^x$ s'impose, pour se ramener à $-2X^2 + X + 3 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et a donc deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-1+5}{-4} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{-4} = \dfrac{3}{2}$. Comme 3^x ne peut pas être négatif (c'est une exponentielle !), on élimine la première valeur et on conserve $3^x = \dfrac{3}{2}$, soit $x\ln(3) = \ln(3) - \ln(2)$, donc $\mathcal{S} = \left\{1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}\right\}$.
5. On va bien sûr dresser un beau tableau, les trois expressions dans les valeurs absolues s'annulant respectivement en 0, et -1 et en -3 :

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
$\|2x\|$		$-2x$		$-2x$		$-2x$	0	$2x$	
$\|2x+2\|$		$-2x-2$		$-2x-2$	0	$2x+2$		$2x+2$	
$\|x+3\|$		$-x-3$	0	$x+3$		$x+3$		$x+3$	
$f(x)$		$-x-1$		$x+5$		$-3x+1$		$x+1$	

En notant $f(x)$ le membre de gauche de l'inéquation, on a donc quatre inéquations à résoudre :

- sur $]-\infty, -3]$, on résout $-x - 1 \leqslant 3$, soit $x \geqslant -4$, et on garde donc pour notre solution l'intervalle $[-4, -3]$.

- sur $[-3,-1]$, on résout $x+5 \leqslant 3$, soit $x \leqslant -2$, on garde l'intervalle $[-3,-2]$.
- sur $[-1,0]$, on résout $-3x+1 \leqslant 3$, soit $3x \geqslant -2$, donc $x \geqslant -\dfrac{2}{3}$, on garde l'intervalle $\left[-\dfrac{2}{3}, 0\right]$.
- enfin, sur $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $x+1 \leqslant 3$ donne $x \leqslant 2$, on garde donc l'intervalle $[0,2]$.

Conclusion : $\mathcal{S} = [-4,-2] \cup \left[-\dfrac{2}{3}, 2\right]$.

6. Commençons par signaler que les valeurs -1 et $-\dfrac{1}{2}$ sont interdites car elles annulent les expressions dans les ln, puis regroupons le membre de gauche dans un seul ln de quotient avant de passer aux exponentielles pour obtenir l'inéquation équivalente $\left|\dfrac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant 2$. Le membre de gauche doit donc vérifier simultanément les deux inéquations suivantes :

- $\dfrac{x+1}{2x+1} \leqslant 2$, soit $\dfrac{x+1-2(2x+1)}{2x+1} \leqslant 0$, donc $\dfrac{-3x-1}{2x+1} \leqslant 0$. Un tableau de signe donne comme solutions de cette inéquation les nombres appartenant à $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ (une autre façon de voir les choses est de dire que le quotient est négatif si et seulement si le produit l'est, et le trinôme obtenu est négatif à l'extérieur de ses racines).
- $\dfrac{x+1}{2x+1} \geqslant -2$, soit $\dfrac{x+1+2(2x+1)}{2x+1} \geqslant 0$, donc $\dfrac{5x+3}{2x+1} \geqslant 0$. Par le même genre de calcul que ci-dessous, on trouve comme solution $\left]-\infty, -\dfrac{3}{5}\right] \cup \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{3}{5}\right] \backslash \{-1\} \cup \left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

Exercice 2

1. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$.
2. Il faut vérifier les trois caractéristiques habituelles :

- la réflexivité est évidente : $A \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}} = A \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}}$ pour tout entier naturel n.
- la symétrie est tout aussi évidente, la définition restant la même si on échange le rôle de A et de B.
- la seule véitable vérification à faire est donc celle de la transitivité. Supposons donc que trois sous-ensembles de $\mathbb{N}$ notés A, B et C vérifient $A \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}} = B \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}}$ pour un certain entier n, et $B \cap \overline{\{0,1,\dots,p\}} = C \cap \overline{\{0,1,\dots,p\}}$ pour un autre entier p, avec par exemple $p > n$. Il est en fait évident qu'on a aussi $A \cap \overline{\{0,1,\dots,p\}} = B \cap \overline{\{0,1,\dots,p\}}$ (les éléments strictement supérieurs à n étant les mêmes dans les ensembles A et B, c'est a fortiori le cas des éléments strictement supérieurs à p), donc on aura $A \cap \overline{\{0,1,\dots,p\}} = B \cap \overline{\{0,1,\dots,p\}} = C \cap \overline{\{0,1,\dots,p\}}$, ce qui prouve que A est en relation avec C.

3. Il y a pas moins de dix vérifications à faire :

- A_1 n'est pas en relation avec A_2 car tous les entiers impaires supérieurs à 42 appartiennent à A_1 mais pas à A_2. Quelle que soit la valeur de n, il y aura toujous un tel entier (et même une infinité) dans $A_1 \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}}$.
- A_1 n'est pas en relation avec A_3 pour la même raison que ci-dessus (les entiers impairs étant rarement multiples de 4).
- $A_1 \mathcal{R} A_4$ est vrai : pour $n = 42$, $A_1 \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}} = A_4 \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}} = A_1$.
- A_1 n'est pas en relation avec A_5 car il contient des entiers pairs supérieurs à n qui ne peuvent pas être premiers, quelle que soit la valeur de n.

- pour la même raison, A_2, A_3 et A_4 ne sont pas non plus en relation avec A_5.
- A_2 et A_3 ne peuvent pas être en relation avec A_4, cette fois-ci car A_4 contient des entiers impairs arbitrairement grands qui ne sont ni dans A_2 ni dans A_3.
- enfin, A_2 et A_3 ne sont pas non plus en relation, car les entiers de la forme $4k+2$ (pairs mais pas multiples de 4) appartiennent tous à A_2 mais pas à A_3, et il en existe toujours de plus grands que n, quelle que soit la valeur de n.

4. Un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ admet toujours un élément maximal. Si B_1 et B_2 sont deux sous-ensembles finis d'élément maximal respectif p_1 et p_2, il suffit de choisir un entier $n \geqslant \max(p_1, p_2)$ pour avoir $B_1 \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}} = B_2 \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}} = \emptyset$, donc $B_A \mathcal{R} B_2$. Si la classe d'équivalence correspondante contenait un ensemble C infini, celui-ci devrait être en relation avec l'ensemble vide (qui est un ensemble fini comme les autres), donc vérifier $C \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}} = \emptyset$ pour un certain entier naturel n. Autrement dit, on devrait avoir $C \subset \{0,1,\dots,n\}$, ce qui est évidemment contradictoire avec le fait que C est un ensemble infini. La classe d'équivalence ne contient donc que les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.
5. Un ensemble C est dans la classe d'équivalence de $\mathbb{N}$ si C contient tous les entiers à partir d'un certain rang n. En fait, ce sera le cas exactement si son complémentaire est fini. En effet, son complétaire doit être inclus dans un ensemble de type $\{0,1,\dots,n\}$, donc il est fini. Et réciproquement, si C a un complémentaire fini, en notant n l'élément maximal de ce complémentaire, on aura $C \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}} = \mathbb{N} \cap \overline{\{0,1,\dots,n\}}$.
6. Un ensemble est dans la classe d'équivalence de A_2 si et seulement si il contient tous les entiers pairs à partir d'un certain rang. Une autre façon de voir les choses : on peut l'écrire sous la forme $F \cup \{2k \mid k \geqslant n\}$ pour un certain entier naturel n et un certain ensemble F fini.

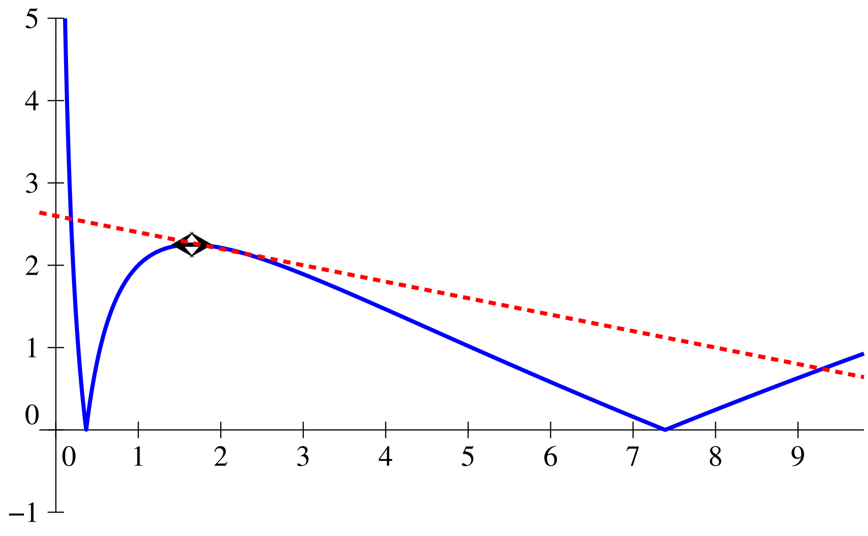
Exercice 3

1. En posant $X = \ln(x)$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - X - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$. Les solutions de l'équation initiale sont donc les deux réels $x_1 = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et $x_2 = e^2$. L'expression $\ln^2(x) - \ln(x) - 2$ étant positive à l'extérieur de ces deux solutions, on en déduit que :
   - $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x) - 2$ si $x \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right] \cup [e^2, +\infty[$.
   - $f(x) = 2 + \ln(x) - \ln^2(x)$ si $x \in \left[\dfrac{1}{e}, e^2\right]$.
2. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 4$, qui se ramène aux deux équations possibles $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = 4$ et $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = -4$. En effectuant à nouveau le changement de variable $X = \ln(x)$, la première équation se ramène à $X^2 - X - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$, et qui admet comme racines $X_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$. De même la deuxième équation se ramène à $X^2 - X + 2 = 0$, qui a un discriminant négatif et donc pas de solution réelle. Il y a donc deux antécédents pour 4, qui sont $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$, et e^3.
3. Posons pour simplifier l'étude $g(x) = \ln^2(x) - \ln(x) - 2$, fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x}$. Cette dérivée est du signe de $2\ln(x) - 1$, et s'annule en particulier lorsque $\ln(x) = \dfrac{1}{2}$, donc $x = \sqrt{e}$. On connait déjà le signe de la fonction g (question 1), on peut donc dresser simultanément le tableau de signe et de variations de la fonction g, et en déduire le tableau de variations de f. Calculons tout de même $g(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{9}{4}$, et signalons que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée

ici), et comme $g(x) = \ln(x)\left(\ln(x) - 1 - \dfrac{2}{\ln(x)}\right)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (ce qui est dans la parenthèse tendant vers $+\infty$).

x	0		$\frac{1}{e}$		$\sqrt{e}$		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. La valeur $x = 2$ se trouve sur l'intervalle sur lequel $g(x)$ est négatif, il faut donc bien faire attention aux signes : $f(2) = -g(2) = 2 + \ln(2) - \ln^2(2)$, et $f'(2) = -g'(2) = \dfrac{1 - 2\ln(2)}{2}$, donc la tangente a pour équation $y = \left(\dfrac{1}{2} - 2\dfrac{\ln(2)}{2}\right)(x-2) + 2 + \ln(2) - \ln^2(2) = \dfrac{1-2\ln(2)}{2}x + 1 + 3\ln(2) - \ln^2(2)$. Son coefficient directeur est $\dfrac{1-2\ln(2)}{2} \simeq \dfrac{-0.4}{2} \simeq -0.2$, et son ordonnée à l'origine $1 + 3\ln(2) - \ln^2(2) \simeq 1 + 2.1 - 0.5 \simeq 2.6$.
5. On fait bien attention à ce que la fonction f n'est pas dérivable en ses points d'annulation (surtout pas de tangentes horizontales à ces endroits-là), on utilise les valeurs approchées de la question précédente pour tracer la tangente, et si on le peut on essaye d'indiquer les antécédents de 4 calculés plus haut, mais l'échelle n'est pas très adaptée pour celà (ils ne figurent pas sur la courbe ci-dessous) :



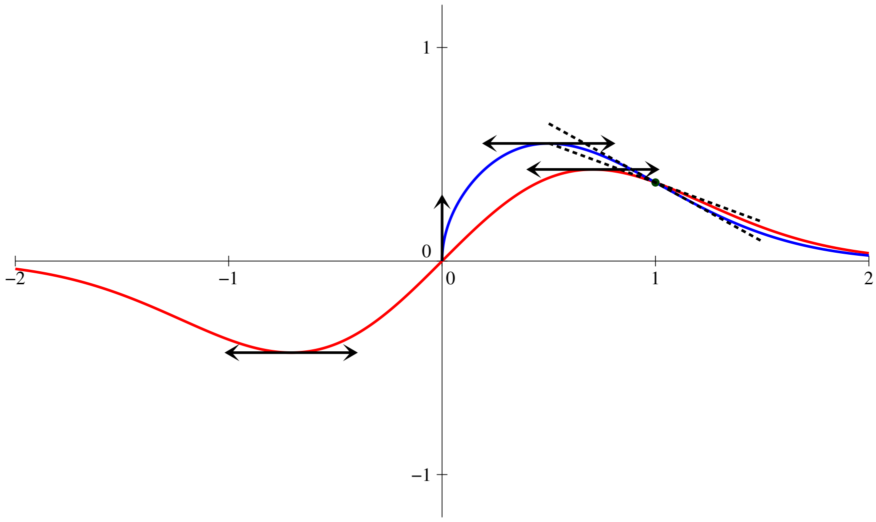
Exercice 4

1. On a bien sûr $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = [0, +\infty[$. La fonction g ne peut pas avoir de parité notable au vu de son domaine de définition, par contre f est impaire : $f(-x) = -xe^{-(-x)^2} = -xe{-}x^2 = -f(x)$.
2. Commençons par signaler que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ par croissance comparée (si on veut faire les choses vraiment bien, on pose $X = x^2$ pour obtenir $f(x) = \pm\sqrt{X}e^{-X}$ et appliquer la croissance

comparée telle qu'on l'a vue en cours). La focntion f est par ailleurs dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$. Cette dérivée s'annule lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$, donc pour $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Elle sera positive entre ces deux racines. Calculons la valeur du maximum (le minimum est opposé par imparité de f) avant de dresser le tableau de variations complet : $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

3. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (en 0, on aura une tangente verticale à cause de la présence de la racine carrée), et $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x^2} - 2x\sqrt{x}e^{-x^2} = \frac{(1-4x^2)e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$. Cette dérivée est du signe de $1-4x^2$, qui s'annule quand $x^2 = \frac{1}{4}$, donc en $x = \frac{1}{2}$. La fonction g est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, admettant pour maximum $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{e}}}$.
4. On peut dériver une deuxième fois sur $]0,+\infty[$:
$g''(x) = \frac{(-8x-2x+8x^3)e^{-x^2} \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(1-4x^2)e^{-x^2}}{4x} = \frac{(-20x^2+16x^4-1+4x^2)e^{-x^2}}{4x\sqrt{x}} = \frac{(-1-16x^2+16x^4)e^{-x^2}}{4x\sqrt{x}}$. Cette dérivée seconde est du signe de $16x^4-16x^2-1$. En posant $X = x^2$, on obtient le trinôme $16X^2-16X-1$, qui a pour discriminant $\Delta = 256+64 = 320 = 64\times 5$, et pour racines $X_1 = \frac{16-8\sqrt{5}}{32} = \frac{2-\sqrt{5}}{4}$, et $X_2 = \frac{2+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\sqrt{5} > 2$, $X_1 < 0$, seule la valeur X_2 correspond donc à une valeur d'annulation de g'', atteinte pour $x = \sqrt{X_2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2}$. Fort heureusement, on ne nous demande rien de plus que le calcul de cette valeur.
5. On calcule donc $f(x)-g(x) = xe^{-x^2} - \sqrt{x}e^{-x^2} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)e^{-x^2}$. Cette différence est du signe de $\sqrt{x}-1$, la courbe de f sera donc au-dessus de celle de g sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et en-dessous sur l'intervalle $[0,1]$. Les courbes se coupent en deux endroits : l'origine du repère, et le point de coordonnées $(1, e^{-1})$.
6. On a bien sûr $f(1) = g(1) = \frac{1}{e}$, comme signalé juste au-dessus. De plus, $f'(1) = -\frac{1}{e}$, la tangente à la courbe de f aura donc pour équation $y = -\frac{1}{e}(x-1)+\frac{1}{e} = \frac{-x+2}{e}$. De même, $g'(1) = -\frac{3}{2}\times\frac{1}{e}$, ce qui donne une tangente d'équation $y = -\frac{3}{2e}(x-1)+\frac{1}{e} = \frac{-3x+4}{2e}$.
7. La courbe de f est en rouge, la courbe de g en bleu, les tangentes en pointillés noirs (oui, on ne voit pas grand chose) :



Exercice 5

1. La fonction ch ne s'annulant jamais (elle a pour minimum 1), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction f est l'inverse d'une fonction paire, donc également paire.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = -\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$. Cette dérivée est du signe de $-\operatorname{sh}(x)$, la fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet pour maximum $f(0) = 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. En résumé :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0 ↗	1	↘ 0

3. On doit donc résoudre l'équation $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{2}$, soit en passant tout du même côté et en multipliant par $2e^x$: $e^{2x} - 2\sqrt{2}e^x + 1 = 0$. On pose $X = e^x$, le trinôme correspondant a pour discriminant $\Delta = 8 - 4 = 4$, et pour racines $X_1 = \dfrac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1$ et $X_2 = \dfrac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$. Les deux racines sont strictement positives, l'équation $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{2}$ a donc deux solutions : $x_1 = \ln(\sqrt{2} - 1)$ et $x_2 = \ln(\sqrt{2} + 1)$. On peut en fait constater aisément que $x_2 = -x_1$, ce qui est bien sûr normal puisque la fonction ch est paire. Bien sûr, $\alpha = x_2$, puisque $x_1 < 0$ ($\sqrt{2} - 1 \in]0, 1[$).

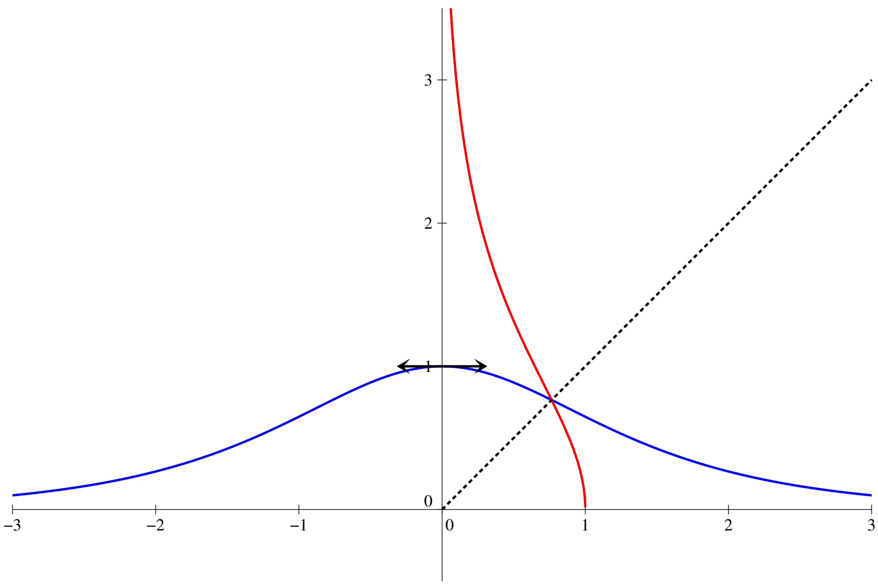
4. On dérive donc une deuxième fois : $f''(x) = \dfrac{-\operatorname{ch}^3(x) + 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) \times \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^4(x)} = \dfrac{2\operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{ch}^3(x)}$. On utilise la formule vue en cours $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ pour remplacer le $\operatorname{sh}^2(x)$ par un $\operatorname{ch}^2(x) - 1$ et simplifier : $f''(x) = \dfrac{\operatorname{ch}^2(x) - 2}{\operatorname{ch}^3(x)}$. Cette dérivée seconde est du signe de $\operatorname{ch}^2(x) - 2$ (son dénominateur est positif), donc positive quand $\operatorname{ch}(x) \geqslant \sqrt{2}$. Les calculs précédents permettant alors d'affirmer que f'' est négative (donc f concave) sur l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$, et f'' est positive (donc f convexe) sur les intervalles $]-\infty, -\alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$.

5. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc bijective de $[0, +\infty[$ vers son intervalle image $]0, 1]$ (attention à bien inclure 1 mais pas 0). Le théorème de la bijection

permet d'affirmer immédiatement que g, qui est définie sur $]0,1]$, est de même monotonie que f, et qu'elle a donc le tableau de variations suivant :

x	0		1
g	$+\infty$	$\searrow$	0

6. La courbe de la fonction f est en bleu (on essaye de respecter le changement de convexité en $\pm\alpha$) et celle de g (obtenue par symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$, indiquée en pointillés noirs) en rouge :



7. Soit $y \in]0,1]$, on va chercher la solution positive de l'équation $f(x) = y$, autrement dit $\dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = y$, ou encore $ye^x + ye^{-x} - 2 = 0$. Comme d'habitude, on multiplie par e^x puis on pose $X = e^x$ pour obtenir l'équation du second degré $yX^2 - 2X + y = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$, qui est bien positif avec l'hypothèse $y \in]0,1]$. Les solutions de l'équation sont $X_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{1-y^2}}{2y} = \dfrac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}$, et $X_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{1-y^2}}{2y} = \dfrac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}$. Les deux solutions sont strictement positives, mais X_2 est la plus grande des deux, et donc la seule qui aura un ln positif (il ne peut y en avoir qu'une de toute façon). La solution positive de l'équation $f(x) = y$ est donc $\ln(x_2)$, ce qui implique que $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$. Comme tout est positif, on peut séparer le ln en deux morceaux : $g(x) = \ln(1 + \sqrt{1-x^2}) - \ln(x)$.

8. Commençons par le calcul direct : $g'(x) = \dfrac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x^2 - \sqrt{1-x^2} - (1-x^2)}{x\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} = -\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. Pas si moche que ça finalement.

   Pour la deuxième méthode, on a intérêt à simplifier en cours de calcul : par définition $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(g(x))} = x$, donc $\operatorname{ch}(g(x)) = \dfrac{1}{x}$ (puisque g est la réciproque de f). On peut en déduire, à l'aide de la formule $\mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2 - 1$, que $\mathrm{sh}^2(g(x)) = \mathrm{ch}^2(g(x)) - 1 = \dfrac{1}{x^2} - 1 = \dfrac{1-x^2}{x^2}$. Comme $\mathrm{sh}(g(x))$ est positif (puisque g est à valeurs positives), on peut en déduire que $\mathrm{sh}(g(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. On peut maintenant appliquer la formule de dérivation de la réciproque : $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = -\dfrac{\mathrm{ch}^2(g(x))}{\mathrm{sh}(g(x))} = -\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.