

Devoir Surveillé n° 2

MPSI Lycée Camille Jullian

5 octobre 2024

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $2 \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \geq 2$
2. $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$
3. $x + 3\sqrt{1-x} \leq 3$
4. $3^x - 2 \times 9^x + 3 = 0$
5. $|2x| - |2x+2| + |x+3| < 3$
6. $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) \leq \ln(2)$

Exercice 2

Dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ de la façon suivante : $A \mathcal{R} B$ s'il existe un entier naturel n tel que $A \cap \{0, 1, \dots, n\} = B \cap \{0, 1, \dots, n\}$ (les complémentaires étant bien sûr à prendre ici dans l'ensemble $\mathbb{N}$).

1. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont en relation et lesquels ne le sont pas pour la relation $\mathcal{R}$: $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 42\}$, $A_2 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A_3 = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A_4 = \mathbb{N}$, $A_5 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est premier}\}$. On justifiera rapidement toutes les réponses données.
4. Montrer que tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ appartient à la même classe d'équivalence. Cette classe d'équivalence contient-elle d'autres ensembles que les sous-ensembles finis ?
5. Déterminer la classe d'équivalence de $\mathbb{N}$.
6. Décrire le plus simplement possible la classe d'équivalence de l'ensemble A_2 de la question 3.

Exercice 3

On considère dans cet exercice la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = |\ln^2(x) - \ln(x) - 2|$.

1. Résoudre l'équation $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = 0$. En déduire une expression de $f(x)$ n'utilisant pas la valeur absolue (on distinguera plusieurs intervalles si besoin).
2. Déterminer tous les antécédents de 4 par la fonction f .
3. Étudier les variations de la fonction f , et dresser son tableau de variations complet.

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f , en son point d'abscisse 2. On donnera une valeur approchée du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine de cette tangente.
- Tracer une allure précise de la courbe représentative de f en tenant compte de tous les calculs effectués précédemment. On donne la valeur approchée $\sqrt{e} \simeq 1.65$ pour aider au tracé de la courbe.

Exercice 4

On définit pour cet exercice deux fonctions f et g par $f(x) = xe^{-x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$.

- Préciser le domaine de définition et la parité éventuelle de ces deux fonctions.
- Étudier complètement la fonction f (**sans** s'intéresser à la convexité).
- Étudier les variations de la fonction g .
- Calculer g'' et déterminer l'abscisse de l'unique point d'inflexion de la fonction g .
- Déterminer la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g (sur l'intervalle où ça a un sens).
- Donner l'équation des tangentes à ces deux courbes en leur point d'intersection autre que l'origine du repère.
- Tracer dans un même repère une allure de ces deux courbes. On rappelle que $\frac{1}{e} \simeq 0.36$, et on donne les valeurs approchées $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$ et $\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} \simeq 0.78$.

Exercice 5

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

- Déterminer le domaine de définition, ainsi que la parité éventuelle, de la fonction f .
- Étudier les variations de la fonction f , et dresser son tableau de variations complet.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{2}$. On notera α sa solution strictement positive. On donne pour la suite de l'exercice $\alpha \simeq 0.88$.
- Calculer la dérivée seconde de la fonction f , et étudier son signe.
- Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ est bijective vers un intervalle à préciser. En notant g la réciproque de cette restriction, donner le tableau de variations de la fonction g .
- Tracer dans un même repère une allure des courbes représentatives des fonctions f et g .
- Donner une expression explicite de la fonction g .
- Calculer la dérivée g' de la fonction g de deux façons : directement, et en utilisant la formule de dérivation d'une réciproque.