Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

14 septembre 2024

Exercice 1

1. Puisqu'il s'agit d'une équation du troisième degré, il s'agit de commencer par en trouver une racine évidente. Ça tombe bien, 1 est solution de l'équation : $1-3-2+4=0$. On peut donc factoriser notre membre de gauche sous la forme $x^3-3x^2-2x+4=(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Par identification des coefficients, on obtient les conditions $a=1$, puis $b-a=-3$ qui donne $b=-2$ et $c-b=-2$ qui donne $c=-4$, cohérent avec le coefficient constant. Il ne nous reste plus qu'à résoudre l'équation du second degré $x^2-2x-4=0$, qui a pour discriminant $\Delta=4+16=20$, et admet pour racines réelles $x_1=\dfrac{2-\sqrt{20}}{2}=1-\sqrt{5}$ et $x_2=\dfrac{2+\sqrt{20}}{2}=1+\sqrt{5}$. On n'oublie pas d'y ajouter la racine évidente avant de conclure : $\mathcal{S}=\{1-\sqrt{5},1,1+\sqrt{5}\}$.
2. On effectue le changement de variable $X=e^x$ pour se ramener à l'équation $2X-\dfrac{1}{X}=1$, équivalente à $2X^2-X-1=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta=1+8=9$ et pour racines $X_1=\dfrac{1-3}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $X_2=\dfrac{1+\sqrt{9}}{4}=1$. Puisqu'on a posé $X=e^x$, la valeur négative X_1 est à éliminer, et la seule solution est obtenue lorsque $e^x=1$, donc $x=0$. Conclusion : $\mathcal{S}=\{0\}$.
3. Avant de faire quoi que ce soit, il convient de préciser les valeurs de x pour lesquelles l'inéquation a un sens, c'est-à-dire celles pour lesquelles les trois expressions dans les ln sont strictement positives. On doit donc avoir $x>2$, $x>-1$ et $x>\dfrac{1}{2}$, ce qui est vrai pour les valeurs de x strictement supérieures à 2. Avec cette hypothèse, l'inéquation peut se mettre sous la forme $\ln((x-2)(x+1))<\ln(2x-1)$, soit $x^2-x-2<2x-1$ (en passant les deux membres à l'exponentielle), ou encore $x^2-3x-1<0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta=8+4=13$ et admet donc pour racines $x_1=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. Le trinôme est négatif entre ses racines, mais il ne faut pas oublier la condition $x>2$ imposée plus haut. Comme $x_1<\dfrac{3}{2}<2$ et $x_2>\dfrac{3+3}{2}>2$, on obtient finalement $\mathcal{S}=\left]2,\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right[$.
4. Là encore, il ne faut pas se précipiter pour écrire n'importe quoi. On distingue en fait trois cas selon les valeurs prises par x :
   - si $x<-\dfrac{1}{3}$, la racine carrée du membre de gauche n'est pas définie, et l'inéquation n'a dans ce cas aucun sens.
   - si $-\dfrac{1}{3}\leqslant x<\dfrac{1}{2}$, le membre de gauche est défini et positif, et celui de droite est strictement négatif. L'inéquation ne peut donc avoir aucune solution sur cet intervalle.
   - enfin, si $x\geqslant\dfrac{1}{2}$, les deux membres de l'inéquation sont positifs et on peut élever au carré sans se poser de questions (ce que vous aviez tous envie de faire dès le départ) :

$3x+1 \leqslant 4x^2-4x+1$, donc $4x^2-7x \geqslant 0$, soit $x(4x-7) \geqslant 0$. Comme x est toujours positif sur notre intervalle de résolution, on est ramenés à l'inéquation fort simple $4x-7 \geqslant 0$, et $\mathcal{S} = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$.

5. Un grand classique : on passe tout du même côté et on met au même dénominateur (sans en prendre un inutilement gros) avant de faire un tableau de signes : $\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{(x-1)(x-2)}{x^2-4} > 0$ donne $\frac{-x^2+4x-1}{x^2-4} > 0$. Le dénominateur de notre fraction a pour racines 2 et -2, il est négatif uniquement entre ces racines. Le numérateur, lui, a pour discriminant $\Delta = 16-4 = 12$ et pour racines $x_1 = \frac{-4-\sqrt{12}}{-2} = 2+\sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{12}}{-2} = 2-\sqrt{3}$. Il sera positif entre ces racines puisque son coefficient dominant est négatif. Reste à placer correctement les différentes valeurs dans le tableau de signes : $2+\sqrt{3} > 2$ et $2-\sqrt{3} < 2$ de façon évidente, mais $2-\sqrt{3} > -2$ (c'est même un nombre positif). D'où le superbe tableau suivant :

x		-2		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$	
$-x^2+4x-1$	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{-x^2+4x-1}{x^2-4}$	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$

Puisqu'on veut que le quotient soit strictement négatif, $\mathcal{S} =]-2, 2-\sqrt{3}[\cup]2, 2+\sqrt{3}[$.

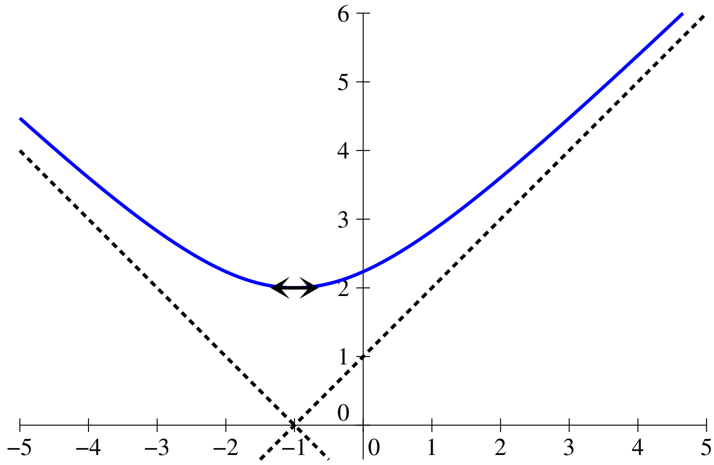
6. Déjà vu dans le devoir de rentrée : deux valeurs absolues sont égales si et seulement si ce qui se trouve à l'intérieur est égal ou opposé. On a donc deux équations à résoudre. La première, $x^2-x-1 = x^2+2x+5$, donne $-3x-6=0$, soit $x=-2$. La deuxième, $x^2-x-1 = -x^2-2x-5$, donne $2x^2+x+6=0$, équation du second degré dont le discriminant $\Delta = 1-48 = -47$ est assez peu compatible avec l'obtention de solutions réelles. On conclut donc rapidement : $\mathcal{S} = \{-2\}$.

Exercice 2

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$ (personne n'a dit que les valeurs entières devaient être positives).
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
3. $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ (on nie simplement l'énoncé correspondant à « (u_n) est croissante »).
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 5$.
5. $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 5$.
6. $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
7. $\exists q \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ (alternativement, on peut remplacer l'égalité de droite par $u_n = q^n u_0$).
8. $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant n_0$, $u_n < M$.
9. L'implication proposée est complètement fausse, par exemple la suite (u_n) vérifiant $u_n = n$ pour tout entier pair, mais $u_n = 0$ pour tout entier impair, n'est pas majorée mais ne tend pas vers $+\infty$. La réciproque de cette propriété serait : si (u_n) a pour limite $+\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée (ça c'est vrai). La contraposée dit quant à elle : si (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, alors (u_n) est majorée (ce qui est faux au vu de ce qu'on a dit plus haut).

Exercice 3

1. Le discriminant du trinôme x^2+2x+5 étant strictement négatif, cette expression est toujours positive et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction f n'est ni paire ni impaire : par exemple $f(1) = 8$ et $f(-1) = 4$, ces deux valeurs ne sont ni égales ni opposées.
2. Il n'y a que les limites du côté des infinis à calculer : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2+2x+5 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
3. On utilise la technique de la quantité conjuguée : $f(x)-2 = \sqrt{x^2+2x+5}-2 = \dfrac{x^2+2x+5-2^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2} = \dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}+2} = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}$, comme demandé dans l'énoncé. Cette quantité est manifestement toujours positive, ce qui prouve qu'on a $f(x) \geqslant 2$, et donc que f est minorée par 2. Pour que ce minorant soit atteint, il faut que le membre de droite de la relation obtenue s'annule, ce qui est le cas pour $x = -1$. On a donc prouvé de façon indirecte que f admet un minimum en -1, de valeur $f(-1) = 2$.
4. Calculons donc $f(x) - x = \sqrt{x^2+2x+5} - x = \dfrac{x^2+2x+5-x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}$. On va factoriser partout par x, en supposant $x \geqslant 0$ pour avoir le droit d'écrire $\sqrt{x^2} = x$: $f(x) - x = \dfrac{x(2+\frac{5}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1)} = \dfrac{2+\frac{5}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}$. Le calcul de limite ne pose plus de problème : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{5}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}} = 2$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = 1$. Autrement dit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
   Du côté de $-\infty$, on a envie de faire le même calcul, mais il faut faire attention au fait que $\sqrt{x^2} = -x$ lorsque $x < 0$. On va donc plutôt calculer la limite de $f(x)+x$ pour avoir un résultat intéressant (de toute façon, la limite égale à $+\infty$ de f en $-\infty$ montre que, s'il y a une asymptote, son coefficient directeur doit être négatif) : toujours en exploitant la quantité conjuguée, $f(x)+x = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}-x}$. En supposant $x < 0$, on peut tout factoriser par x (quasiment le même calcul que précédemment) pour obtenir $f(x)+x = \dfrac{2+\frac{5}{x}}{-1-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}$.
   Cette fois-ci, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x = -1$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = -x-1$ est asymptote à la courbe de f du côté de $-\infty$.
5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui est sous la racine carrée ne s'annule jamais) et $f'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. Sans surprise, cette dérivée s'annule en $x = 1$, qui correspond au minimum déjà trouvé en question 2. La fonction f est décroissante sur $]-\infty,-1]$ et croissante sur $[-1,+\infty[$.
6. La dérivée qu'on vient d'obtenir est elle-même dérivable, et $f''(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+5}-(x+1)\times\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}}{x^2+2x+5} = \dfrac{(x^2+2x+5)-(x+1)^2}{(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{4}{(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}}$.
   Cette dérivée seconde est toujours positive, la fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier.
7. On trace bien évidemment les asymptotes en même temps que la courbe :



Problème (d'après un vieux sujet de bac)

I. Étude d'une fonction.

1. (a) La fonction h est définie sur $\mathcal{D}_h =]-1, +\infty[$. Elle est dérivable sur tout cet intervalle, et $h'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. En particulier, $h'(0) = 1$.

   (b) Puisque $h(0) = \ln(1) = 0$, le quotient $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est égal à $\dfrac{h(x) - h(0)}{x}$, sa limite en 0 est donc égale à $h'(0)$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Cette limite étant la valeur imposée par l'énoncé pour $f(0)$, on peut affirmer que la fonction f est continue en 0.

2. (a) Si $t \geqslant 0$, $1 + t \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ (retournement de l'inégalité par passage à l'inverse). Pour l'inégalité de gauche, puisque $1 + t \geqslant 0$, elle est équivalente à $(1-t)(1+t) \leqslant 1$, soit $1 - t^2 \leqslant 1$, ce qui est évidemment vrai.

   (b) On intègre l'encadrement précédent entre 0 et x : $\displaystyle\int_0^x 1 - t \, dt = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^x = x - \frac{x^2}{2}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t} \, dt = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$, et enfin $\displaystyle\int_0^x 1 \, dt = [t]_0^x = x$, ce qui donne bien l'encadrement demandé.

3. (a) La fonction g est dérivable sur $]-1, +\infty[$, et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{2(2+x) - 2x}{(2+x)^2} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{4}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2} = \dfrac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$. Cette dérivée est positive sur tout l'intervalle $]-1, +\infty[$ (et en particulier quand $x \geqslant 0$, donc). De plus, son dénominateur, si on le développe brutalement, est égal à $(1+x)(4+4x+x^2) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$, expression qui est plus grande que 4 quand $x \geqslant 0$. On en déduit directement la majoration $g'(x) \leqslant \dfrac{x^2}{4}$.

   (b) Si on intègre simplement l'encadrement précédent, en tenant compte du fait que $g(0) = 0$, on obtient $0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{x^3}{12}$.

4. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2}$. Le signe du numérateur n'est pas évident, mais on a prouvé à la question précédente que $g(x) \geqslant 0$, donc $\ln(1+x) \geqslant$

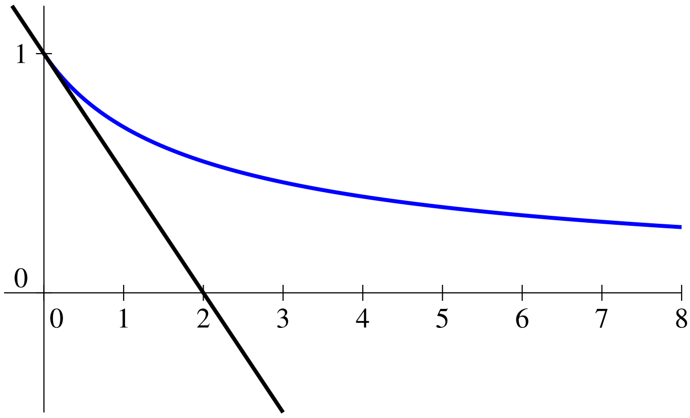
$\dfrac{2x}{2+x}$, et $\dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leqslant \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{2+x} = \dfrac{x(2+x)-2x(x+1)}{(1+x)(2+x)} = -\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)} \leqslant 0$.
La dérivée de f est donc toujours négative, et f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

5. (a) On a bien sûr envie d'utiliser de la croissance comparée, mais si on est rigoureux, on ne peut pas tout à fait se contenter de cet argument car notre numérateur $\ln(1+x)$ est légèrement plus grand que $\ln(x)$. Une façon de faire est de découper ce numérateur à l'aide des règles de calcul sur la fonction ln : $\ln(1+x) = \ln\left(x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, donc $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$. Le premier terme de cette somme a une limite nulle en $+\infty$ par croissance comparée, le deuxième a une limite nulle car son numérateur tend déjà vers 0, donc on obtient désormais sans problème $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) En repartant de l'encadrement de la question 2.*b*, $-x \leqslant -\ln(1+x) \leqslant \dfrac{x^2}{2} - x$, donc $0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$. L'inégalité de gauche ne va pas nous servir à grand chose, mais celle de droite, une fois divisée par x^2 (qui est bien sûr positif) permet d'affirmer que $\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. On sait par ailleurs que $g(x) \leqslant \dfrac{x^3}{12}$, donc $\ln(1+x) \leqslant \dfrac{2x}{2+x} + \dfrac{x^3}{12}$. En passant à l'opposé et en ajoutant x, on obtient donc $x - \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{2x}{2+x} - \dfrac{x^3}{12} = \dfrac{2x+x^2-2x}{2+x} - \dfrac{x^3}{12} = \dfrac{x^2}{2+x} - \dfrac{x^3}{12}$. On peut à nouveau diviser par x^2 : $\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} \geqslant \dfrac{1}{2+x} - \dfrac{x}{12}$. Le membre de droite de cette inégalité a le bon goût de tendre vers $\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers 0. Comme notre expression est par ailleurs majorée par $\dfrac{1}{2}$, on peut donc appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

   (c) On remarque que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Au signe près, c'est exactement l'expression dont on a calculé la limite ci-dessus. On a donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$, ce qui prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. Puisqu'on a par ailleurs $f(0) = 1$, la tangente demandée a pour équation $y = -\dfrac{1}{2}(x-0) + 1 = 1 - \dfrac{1}{2}x$.

   (d) On ne dispose en fait que de très peu d'éléments : la tangente qu'on vient de calculer (on peut constater en passant que l'inégalité de gauche de l'encadrement de la question 2.*b* prouve, une fois divisé par x, que la courbe est toujours au-dessus de cette tangente), la limite en $+\infty$, et c'est tout. Mais l'allure de la courbe est très simple (tangente en noir sur mon graphique, l'échelle n'est pas la même sur les deux axes, d'où l'impression d'une pente plus négative que ce qu'on a calculé) :



II. Une étude de suite.

1. Pour que la suite soit bien définie, il suffit de toujours avoir $u_n > -1$ (pour que l'expression dans le ln définissant u_{n+1} soit strictement positive). On va prouver mieux (parce que c'est plus facile) : montrons par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n. C'est le cas pour $n = 0$ puisque $u_0 = 1$ par hypothèse. Si on suppose la propriété vérifiée au rang n, alors $1 + u_n > 1$, donc $\ln(1 + u_n) > \ln(1) = 0$ (croissance de la fonction ln), donc $u_{n+1} > 0$, ce qui prouve l'hérédité de notre propriété. La suite (u_n) est donc bien définie.

   Pour la monotonie, on constate que $u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n) - u_n$. Or, on a prouvé dans la première partie du problème (question 2.b) que, $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1 + x) \leqslant x$. On peut appliquer ce résultat à u_n (qui est positif d'après la récurrence précédente), donc $\ln(1 + u_n) - u_n \leqslant 0$, et la suite (u_n) est donc décroissante. Étant minorée par 0, elle converge donc (théorème de convergence monotone). Notons l sa limite. Si (u_n) converge vers l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+u_n) = l$. Or, la fonction ln étant continue, on devrait aussi avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+u_n) = \ln(1 + l)$ (on passe simplement à la limite dans le ln). En comparant ces deux expressions, on constate que $\ln(1 + l) = l$. Si $l \neq 0$, on peut en déduire, en divisant par l, que $f(l) = 1$, ce qui est impossible (la fonction f est strictement décroissante et $f(0) = 1$). Conclusion : on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Par définition, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ln(1 + u_n)} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n - \ln(1 + u_n)}{u_n \times \ln(1 + u_n)}$. On va écrire ce quotient légèrement différemment pour exploiter les différentes limites calculées dans la première partie du problème : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - \ln(1 + u_n)}{u_n^2} \times \dfrac{u_n}{\ln(1 + u_n)}$. Comme (u_n) tend vers 0, le premier quotient a pour limite $\dfrac{1}{2}$ (question 5.b de la première partie). Le deuxième quotient, lui, est l'inverse d'un quotient de limite 1 (question 1.b de cette même première partie), donc tend également vers 1. Il ne reste plus qu'à faire le produit des deux limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}$.

3. On va démontrer les deux inégalités séparément car les calculs commencent à devenir extrêmement laids. Celle de droite est encore assez tranquille si on repart de la bonne inégalité, à savoir $g(x) \geqslant 0$: on a donc $\ln(1 + x) \geqslant \dfrac{2x}{2 + x}$, donc $\dfrac{1}{\ln(1 + x)} \leqslant \dfrac{2 + x}{2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}$ (en séparant simplement le numérateur de la fraction et en simplifiant). On en déduit directement que $\dfrac{1}{\ln(1 + x)} - \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   On peut alors se douter que l'inégalité de gauche va s'obtenir à partir de la majoration

$g(x) \leqslant \frac{x^3}{12}$. En effet, mais il faut un certain courage pour aller jusqu'au bout du calcul : $\ln(1+x) \leqslant \frac{2x}{2+x} + \frac{x^3}{12} = \frac{24x + 2x^3 + x^4}{24 + 12x}$. On passe à l'inverse en changeant le sens de l'inégalité, et on soustrait $\frac{1}{x}$: $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \geqslant \frac{24+12x}{24x+2x^3+x^4} - \frac{1}{x} = \frac{24+12x-2x^2-x^3-24}{x(24+2x^2+x^3)} = \frac{12-2x-x^2}{24+2x^2+x^3}$. On ne voit pas trop le rapport avec l'expression donnée dans l'énoncé, on va donc faire apparaître le $\frac{1}{2}$ en forçant un peu : $\frac{12-2x-x^2}{24+2x^2+x^3} = \frac{12+x^2+\frac{x^3}{2}-2x-2x^2-\frac{x^3}{2}}{24+2x^2+x^3} = \frac{1}{2} - \frac{2x+2x^2+\frac{x^3}{2}}{24+2x^2+x^3}$. Or, comme on se place sur l'intervalle $[0,1]$, $x^2 \geqslant 0$ et $x^3 \geqslant 0$, donc $24+2x^2+x^3 \geqslant 24$ (ça c'est facile) et $\frac{1}{24+2x^2+x^3} \leqslant \frac{1}{24}$. Mais on a aussi $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$, donc $2x+2x^2+\frac{x^3}{2} \leqslant 2x+2x+\frac{x}{2} = \frac{9x}{2}$. Finalement, on peut en déduire que $\frac{2x+2x^2+\frac{x^3}{2}}{24+2x^2+x^3} \leqslant \frac{\frac{9x}{2}}{24} = \frac{3x}{16}$, dont découle enfin l'horrible inégalité $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{3}{16}x$. Ouf !

4. Une parenthèse de trivialité inattendue dans cette fin de problème affreusement technique, il suffit de poser $x = u_n$ dans l'encadrement précédent. On a le droit de le faire car la suite (u_n) est strictement positive, décroissante et $u_0 = 1$, donc on a toujours $u_n \in]0,1]$.

   La deuxième partie de la question est à nouveau horrible et impose de procéder par récurrence. On va traiter séparément les deux inégalités, en commençant par celle de gauche. On va donc prouver par récurrence la propriété P_n : $u_n \geqslant \frac{2}{n+2}$. Pour $n = 0$, on calcule $\frac{2}{0+2} = 1 = u_0$, donc l'inégalité est vérifiée (c'est même une égalité). Supposons désormais $u_n \geqslant \frac{2}{n+2}$ pour un certain entier naturel n. D'après la première partie de la question, $v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n}$. Or, avec l'hypothèse faite, $\frac{1}{u_n} \leqslant \frac{n+2}{2}$, on en déduit donc que $\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{n+2}{2} = \frac{n+3}{2}$. Un dernier passage à l'inverse donne $u_{n+1} \geqslant \frac{2}{n+3}$, ce qui est exactement la propriété P_{n+1}. Notre propriété est donc héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Même méthode pour l'inégalité de droite, on va démontrer par récurrence la propriété Q_n : $u_n \leqslant \frac{4}{n+4}$. Pour $n = 0$, le membre de droite est à nouveau égal à 1, donc l'inégalité est vraie puisque c'est une égalité. Supposons la propriété Q_n vérifiée, et partons cette fois de l'autre inégalité obtenue au début de la question : $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leqslant v_{n+1} - v_n$. On en déduit que $\frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n + \frac{1}{u_n}$. On peut minorer les deux termes dépendant de u_n en exploitant l'hypothèse de récurrence : $\frac{1}{u_n} \geqslant \frac{n+4}{4}$, et $-\frac{3}{16}u_n \geqslant -\frac{3}{16} \times \frac{n+4}{4} = -\frac{3}{4(n+4)}$. On a donc $\frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{n+4}{4} - \frac{3}{4(n+4)} = \frac{2(n+4)+(n+4)^2-3}{4(n+4)} = \frac{n^2+10n+21}{4(n+4)}$. Ce n'est pas très beau. Pour obtenir la propriété Q_{n+1} en passant à l'inverse, il faudrait que le $n+4$ du dénominateur disparaisse et qu'un facteur $n+5$ apparaisse au numérateur. Autrement dit, on voudrait un numérateur égal à $(n+4)(n+5) = n^2+9n+20$. En fait, ça tombe très bien, le numérateur qu'on a obtenu est plus grand que celui recherché, on peut donc écrire $\frac{1}{u_n} \geqslant \frac{n^2+9n+20}{4(n+4)} = \frac{(n+4)(n+5)}{4(n+4)} = \frac{n+5}{4}$, et passer à l'inverse pour en déduire Q_{n+1}, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence. Je sens confusément que cette question ne sera pas traitée par beaucoup d'élèves...

5. On pourrait naïvement penser avoir un peu de répit pour la dernière question et s'en sortir avec le théorème des gendarmes, mais en fait non : après multiplication du dernier encadrement obtenu par n, on aura une limite égale à 2 à gauche, mais à 4 à droite. Il faudrait donc réussir à améliorer la majoration de l'encadrement précédent (la limite est censée être égale à 2), et là, je vais être très honnête avec vous, je ne vois pas de façon élémentaire de le faire (je n'ai pas sous la main de corrigé officiel de cette superbe épreuve). Pour ne pas laisser un corrigé incomplet, je vous donne une méthode, mais que vous ne pourrez pas comprendre avant quelques mois : en écrivant le début du développement asymptotique de la suite (u_n) sous la forme $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (forme qu'il faudrait d'ailleurs justifier, ce qui n'a rien d'évident), on aura $u_{n+1} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{a}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{a}{n} - \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'un autre côté, $u_{n+1} = \ln(1+u_n) = \ln\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en effectuant un développement limité à l'ordre 2 de notre ln. En identifiant les deux formes obtenues pour le développement asymptotique de u_{n+1}, on trouve l'équation $a = \frac{a^2}{2}$, donc $a = 1$ (impossible vu l'encadrement de la question 4), ou $a = 2$. Conclusion : $u_n \sim \frac{2}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 2$.